Módulos de matemáticas

Aprendizaje paso a paso

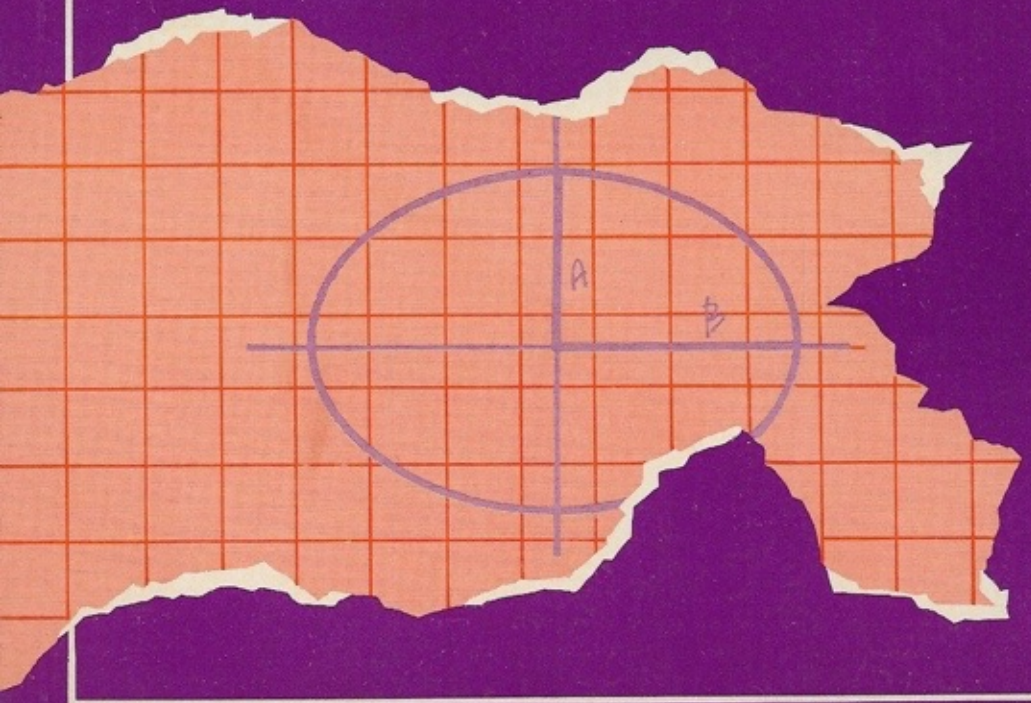
Bloque 6

Geometría analítica

Módulo 4

LA ELIPSE

Conrado Flores García



trillas

SERIE MÓDULOS DE MATEMÁTICAS

Conrado Flores García

A través del tiempo y en todos los niveles de aprendizaje, los estudiantes han considerado a las matemáticas como un escollo insalvable. Aun cuando se han establecido nuevos enfoques pedagógicos para la enseñanza de esta materia, casi siempre los educandos enfrentan su estudio con verdadero temor, debido al prejuicio generalizado sobre la supuesta dificultad de esta asignatura.

La serie *Módulos de matemáticas*, a la cual pertenece el presente texto, es un valioso auxiliar con el que puede abordarse sencilla y eficazmente el proceso de enseñanza-aprendizaje de este campo de conocimiento.

Es necesario destacar que los *Módulos de matemáticas* constituyen un método de *aprendizaje paso a paso*, ya que la información se presenta por medio de cuadros didácticos (informativos, de preguntas y de respuestas), que están organizados en orden creciente de complejidad. De este modo, se conduce *paso a paso* al lector desde los conceptos más elementales, como los de conjunto y elemento, hasta los más complejos de cálculo integral, pasando por aquéllos del álgebra (estructuras, operaciones y modelos), de la lógica matemática, de la geometría euclidiana, de la trigonometría, de la geometría analítica y del cálculo diferencial.

Mediante este novedoso sistema, más ágil y motivador que el de la enseñanza programada, se facilita tanto la exposición de los temas como la comprensión y asimilación de los mismos.

El autor revisa el panorama matemático fundamental a lo largo de los 64 módulos que, agrupados en 8 bloques, constituyen la serie. Además, cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos denominado *Memo*.

Los profesores de enseñanza secundaria, de preparatoria y de universidad pueden emplear los *Módulos de matemáticas* como parte integrante de sus guiones didácticos y los estudiantes tienen la posibilidad de incorporarse como material complementario y de apoyo a las experiencias adquiridas en el aula. Asimismo, estos libros son útiles para las personas que quieran actualizar o bien repasar, sus conocimientos en esta área o para quienes deseen iniciar un aprendizaje autodidáctico por la imposibilidad de asistir a una institución educativa.

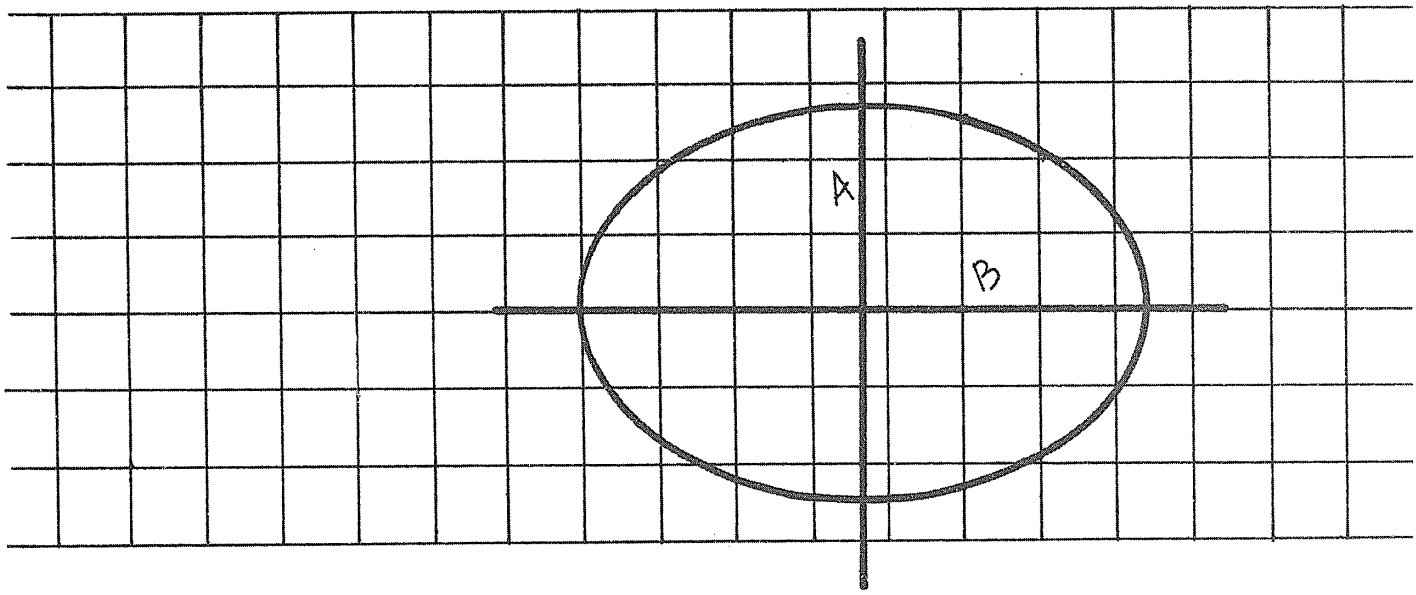
Esperamos que al estudiar los Módulos de matemáticas, los alumnos se den cuenta de que esa fortaleza defendida por ejércitos de números, símbolos y fórmulas, aparentemente inexpugnable, puede ser alcanzada por cualquier persona decidida y tesonera.

LA ELIPSE

Obras que integran el bloque 6 *(Geometría analítica):*

1. Introducción a la geometría analítica
2. La recta
3. La circunferencia
4. ***La elipse***
5. La hipérbola
6. La parábola
7. Las cónicas y la ecuación general de segundo grado
8. Relaciones y lugares geométricos.

ANUIES
Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 6
Geometría analítica

Módulo 4
LA ELIPSE

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

La presentación y disposición en conjunto de
LA ELIPSE
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984. Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm 158

Primera edición, julio 1984
ISBN 968-24-0835-0

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

4.1 Los elementos de una elipse 9

4.2 Ecuación ordinaria de una elipse (horizontal o vertical) con centro en el origen 31

4.3 Ecuación de una elipse horizontal o vertical con centro en el origen. Ejercicios 41

4.4 Ecuación de una elipse horizontal o vertical con centro de un punto cualquiera 56

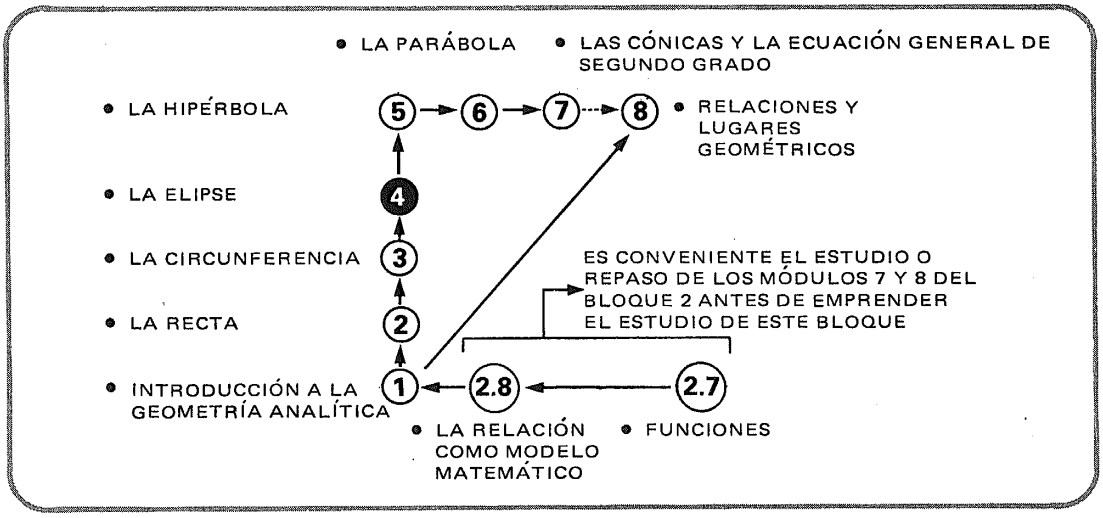
4.5 Ecuación general de una elipse con ejes paralelos a los coordenados 76

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 6. Geometría analítica

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico representado por una relación cuya regla de correspondencia es una ecuación lineal, una ecuación cuadrática, o bien, una ecuación, una desigualdad, un sistema de ecuaciones o de desigualdades cualesquiera

Esquema estructural del bloque 6



Módulo 4. La elipse

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico llamado elipse

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones sobre la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Los números complejos (concepto y manejo)	1	14
• Resolución de ecuaciones de primer y segundo grados	2	2, 5
• Resolución de sistemas de ecuaciones	2	3, 11
• Propiedades geométricas de ángulos, triángulos y polígonos convexos	4	1, 2, 3, 4, 5, 6
• Las funciones trigonométricas directas o inversas	5	1, 3, 4, 5
• Algunas identidades trigonométricas	5	6
• La circunferencia	6	3

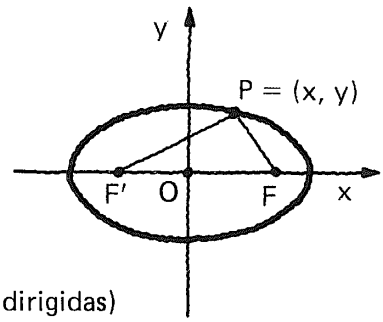
4.1

Los elementos de una elipse

1

Elipse

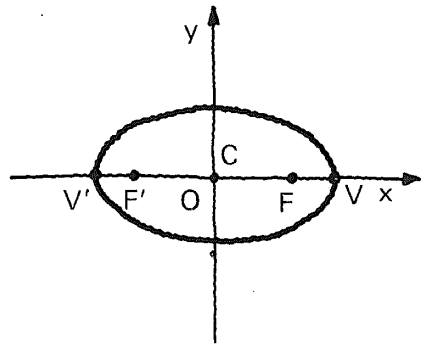
es un conjunto
de puntos
en el plano,
que
satisfacen
la condición
siguiente:



la suma de las distancias (no dirigidas)
de cualquiera de los puntos de la elipse
a dos puntos fijos, llamados
focos, es constante.

2

Los puntos F y F'
son los
focos
de la elipse.
A los puntos V y V'
se les llama
vértices
de la elipse.
El punto C
es el centro de la elipse,
que en este caso,
coincide con el origen
del sistema cartesiano.



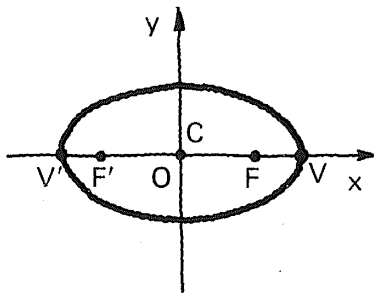
3

A la medida del segmento $\overline{V'V}$ le llamamos

eje mayor,

y a la medida de $\overline{OV}$ u $\overline{OV'}$ le llamamos

semieje mayor.



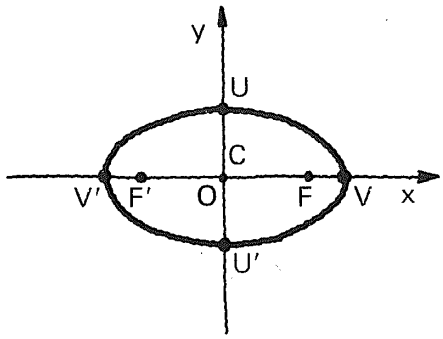
4

A $|\overline{UU'}|$* le llamamos

eje menor,

y a $|\overline{OU}|$ o $|\overline{OU'}|$

semieje menor.



* Medida del segmento $\overline{UU'}$.

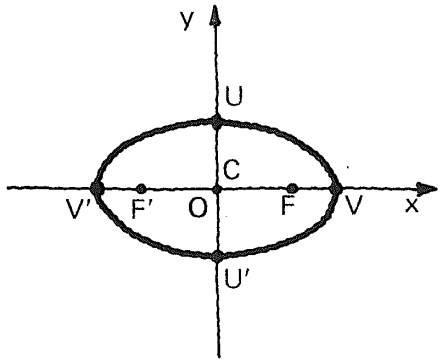
5

A $|\overline{FF'}|$ le denominamos

distancia focal,

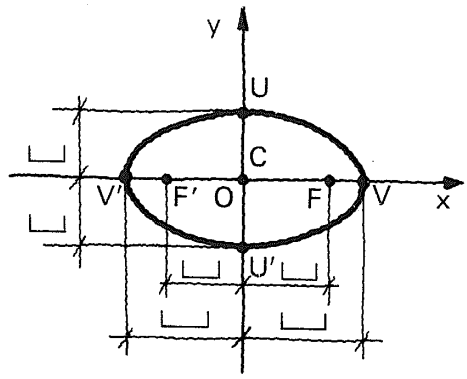
y a $|\overline{OF}|$ u $|\overline{OF'}|$

semidistancia focal.



6

Denotemos con
a
el semieje mayor,
con
b
el semieje menor
y con
c
la semidistancia focal.



Rotular en la figura.

Respuesta
en el cuadro siguiente.

De acuerdo con la figura,
el **eje mayor** es igual a

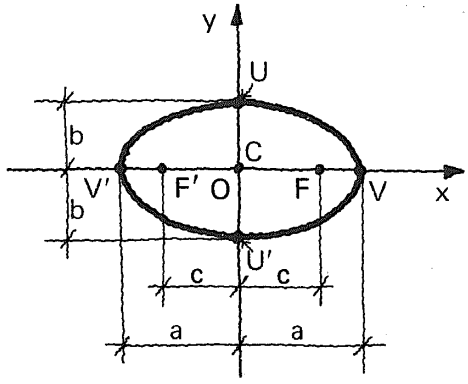
└_____┘

El **eje menor**
es igual a

└_____┘

La **distancia focal**
es igual a

└_____┘



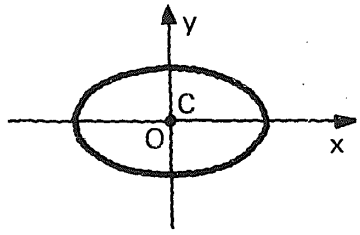
2a

2b

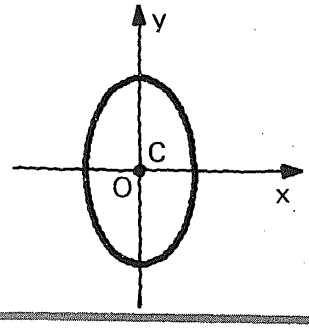
2c

7

A una elipse como esta
la llamamos
elipse horizontal.
El eje mayor está
contenido en el eje de las x.

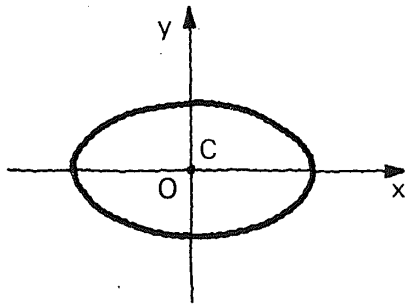


Ésta es una
elipse vertical.
Su eje mayor está
incluido en el eje de las y.

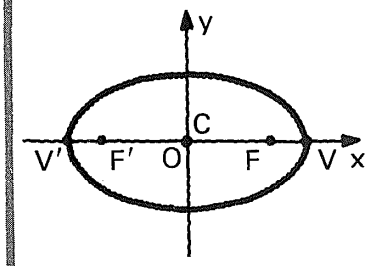


8

En una elipse horizontal,
con centro en el origen,
los focos y los vértices
se encuentran
en
el eje de las x.



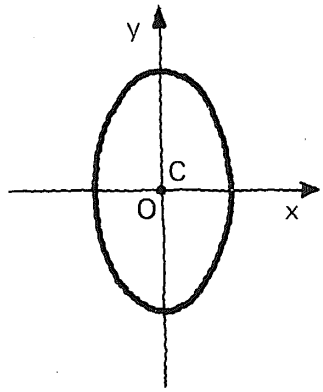
Señalarlos,
en forma aproximada,
en la gráfica adjunta



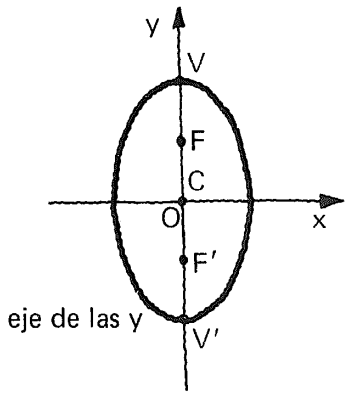
F y F' son los focos
V y V' son los vértices

9

En una elipse vertical,
con centro en el origen
los vértices y los focos
están
en el
_____.



Señalarlos en la gráfica.



V y V' son los vértices.
F y F' son los focos.

10

Para la elipse representada:

C = _____.

F = _____.

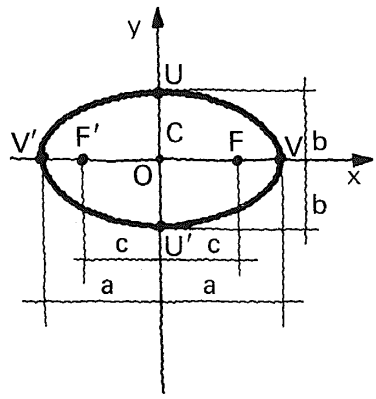
F' = _____.

V = _____.

V' = _____.

U = _____.

U' = _____.



Dar los pares ordenados correspondientes
a cada uno de los puntos.

(0, 0)

(c, 0)

(−c, 0)

(a, 0)

(−a, 0)

(0, b)

(0, −b)

11

Para la elipse representada:

C = [ ].

F = [ ].

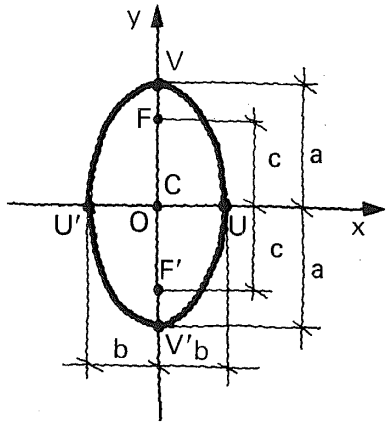
F′ = [ ].

V = [ ].

V′ = [ ].

U = [ ].

U′ = [ ].



(0, 0)

(0, c)

(0, −c)

(0, a)

(0, −a)

(b, 0)

(−b, 0)

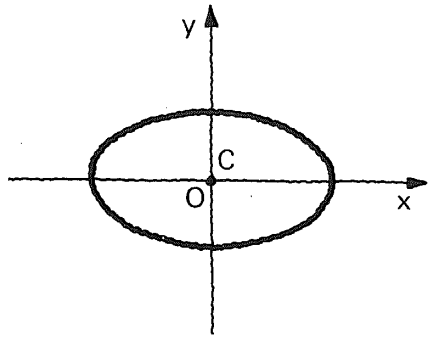
12

Busquemos
una
ecuación

para
una

elipse horizontal

con
centro
en el origen.

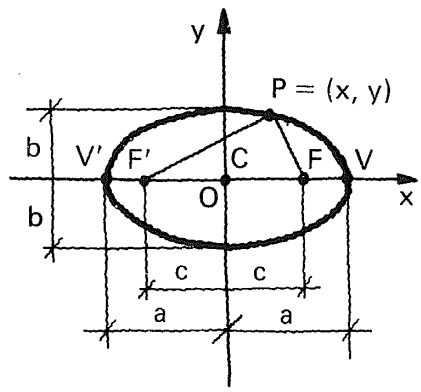


13

Partiremos de la definición
que hemos establecido
para la elipse.

14

Hemos definido una elipse como un conjunto de puntos en el plano, tales que la suma de las distancias (no dirigidas) de cualquiera de los puntos de la elipse a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.



15

De acuerdo con lo anterior, podemos escribir para la elipse representada:

$\overline{|F'P|} + \overline{|PF|} = k$

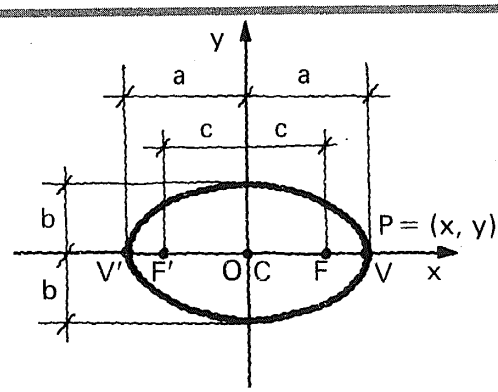
Por ejemplo:

$\overline{|F'P|} + \overline{|PF|} = k$

siendo k una constante.

16

Supongamos, ahora, al punto P = (x, y) ocupando la posición de V.
Debe seguirse verificando:
$\overline{|F'P|} + \overline{|PF|} = k =$ ____.



Intentemos dar el valor de k para esta posición particular de P.

$\overline{|F'P|} = c + a$

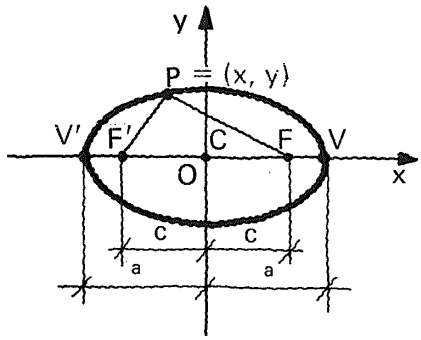
$\overline{|PF|} = a - c$

$\overline{|F'P|} + \overline{|PF|} = c + a + a - c$

2a

17

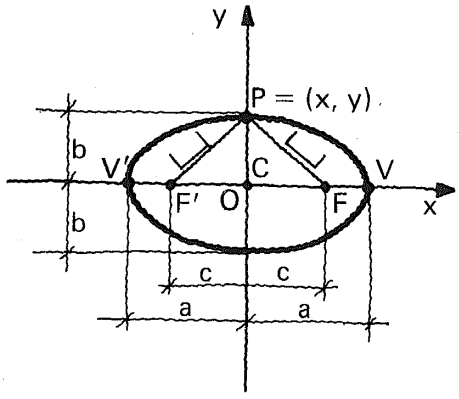
Por lo tanto,
para cualquier
posición de
P = (x, y)
en la elipse,
deberá verificarse que:



$|\overrightarrow{F'P}| + |\overrightarrow{PF}| = 2a$

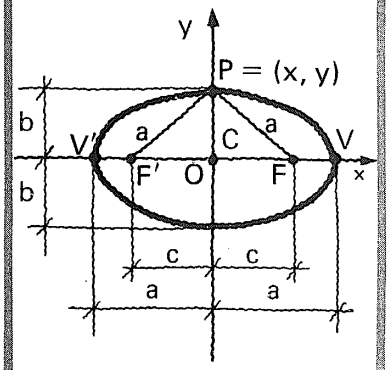
18

¡Atención!
Para esta otra
posición particular
de P
debe verificarse,
teniendo en cuenta
la simetría de la figura:



y podemos expresar
$|\overrightarrow{F'P}|$ y $|\overrightarrow{PF}|$
en términos de las
constantes dadas.

$|\overrightarrow{F'P}| =$ ____.
$|\overrightarrow{PF}| =$ ____.



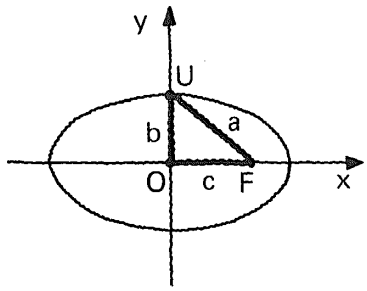
$|\overrightarrow{F'P}| = |\overrightarrow{PF}|$

a
a

19

Vemos que
por medio del triángulo
rectángulo OUF,
podemos
precisar las relaciones
entre a, b, c,
ya que,
de acuerdo con
Pitágoras:

└──────────────────┘.

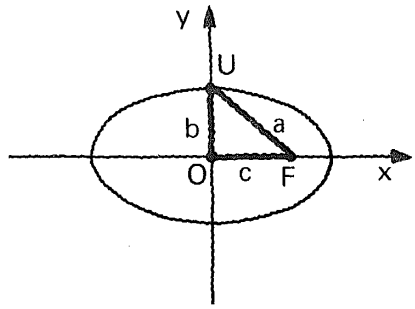


$a^2 = b^2 + c^2$

20

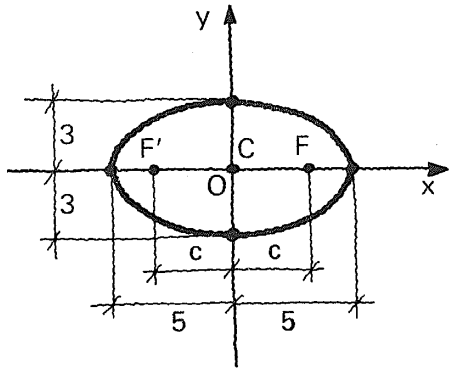
No perdamos de vista
esta
importante relación.

$a^2 = b^2 + c^2$



21

Si,
por ejemplo,
$a = 5$
y
$b = 3$
la semidistancia
focal **c**
será igual a
└──┘,
y la distancia focal
será igual a └──┘.



De $a^2 = b^2 + c^2$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{25 - 9}$

$c = 4$

4

8

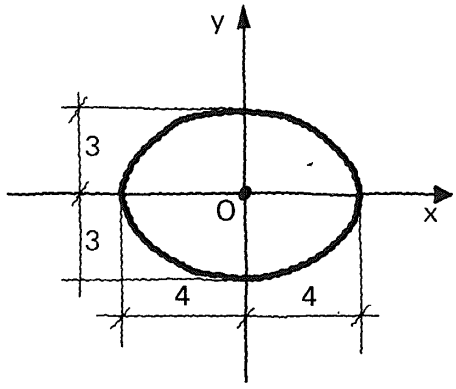
22

Para la elipse representada, la semidistancia focal es igual a

└_____┘,

y
la distancia focal es igual a

└_____┘.



$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{16 - 9}$

$c = \sqrt{7}$

$\sqrt{7} \doteq 2.65$

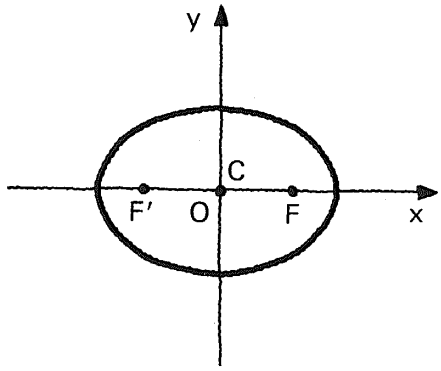
$2\sqrt{7} \doteq 5.30$

23

En la elipse que hemos estado considerando

F = └_____┘.

F′ = └_____┘.



$(\sqrt{7}, 0)$

o en forma aproximada: (2.65, 0)

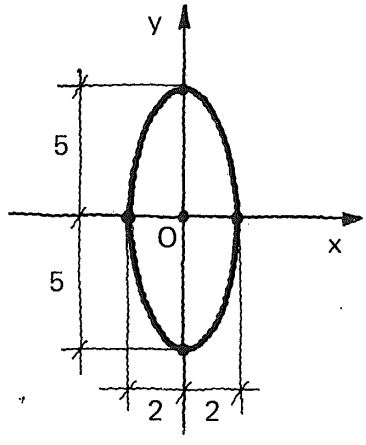
$(-\sqrt{7}, 0)$ o $(-2.65, 0)$

24

Para la elipse aquí descrita, las coordenadas de los focos son:

F = └_____┘.

F′ = └_____┘.



$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{25 - 4}$

$c = \sqrt{21}$

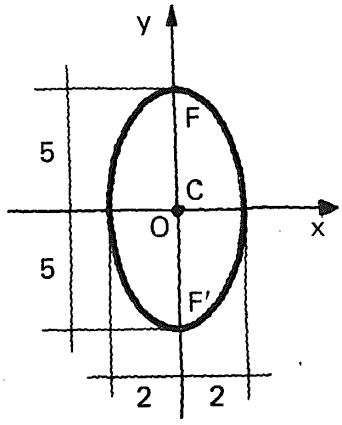
$(0, \sqrt{21})$

o en forma aproximada: (0, 4.58)

$(0, -\sqrt{21})$ o $(0, -4.58)$

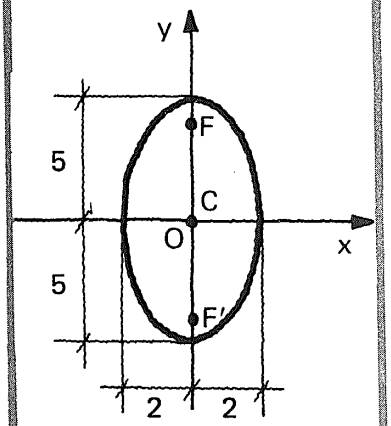
25

Representar los focos en la gráfica adjunta.



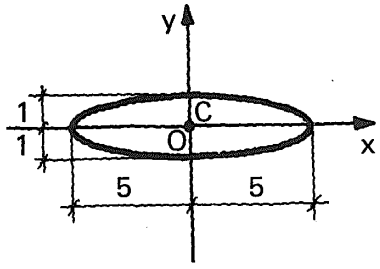
$F = (0, \sqrt{21})$

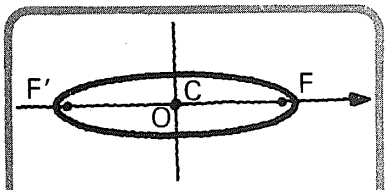
$F' = (0, -\sqrt{21})$



26

Indicar las coordenadas de los focos de la elipse representada, y señalarlos en la gráfica.





$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{25 - 1}$

$c = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \doteq 4.90$

$F = (2\sqrt{6}, 0)$

$F' = (-2\sqrt{6}, 0)$

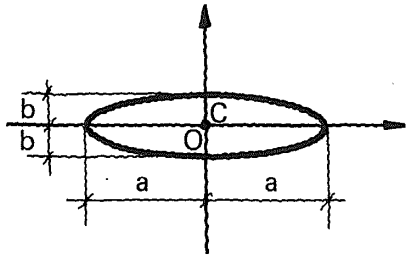
27

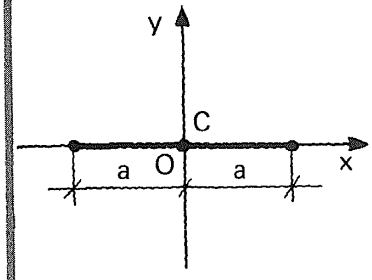
Ahora, vamos a suponer que asignamos

a b

valores cada vez más cercanos a cero, conservando constante el valor de **a** .

¿Qué tendríamos en el límite de este proceso?



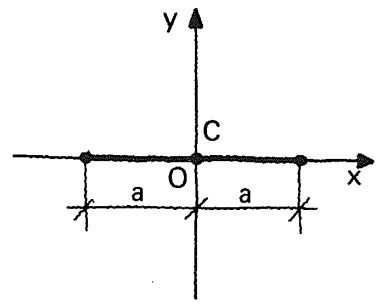


un segmento de longitud 2a

28

¿Dónde estarían localizados los focos de esta

elipse "degenerada" ?



Si $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

y $b = 0$

$c = \sqrt{a^2} = a$

en los extremos del segmento

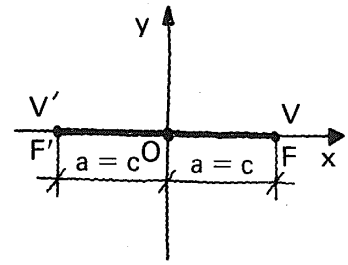
29

Observamos que los vértices y los focos coinciden en esta

elipse horizontal degenerada.

V = F = _____.

V′ = F′ = _____.



(a, 0) ó (c, 0)

(−a, 0) ó (−c, 0)

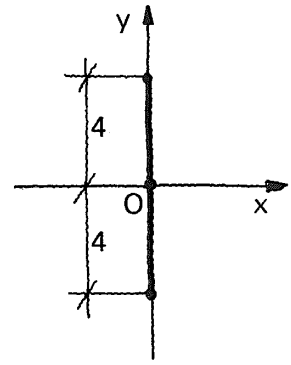
30

Ahora, demos los vértices y los focos de esta

elipse vertical degenerada.

_____

_____

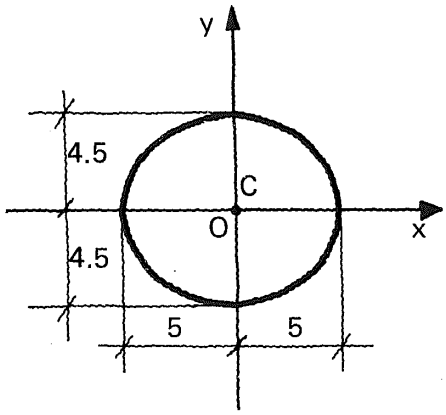


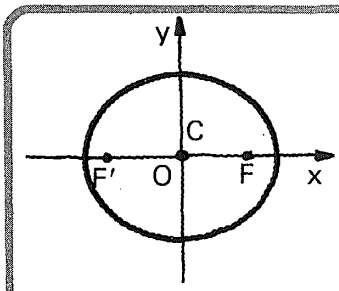
V = F = (0, 4)

V′ = F′ = (0, − 4)

31

Dar los focos de la elipse aquí descrita, e indicarlos en la gráfica.





$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 20.25}$

$= \sqrt{4.75} \doteq 2.18$

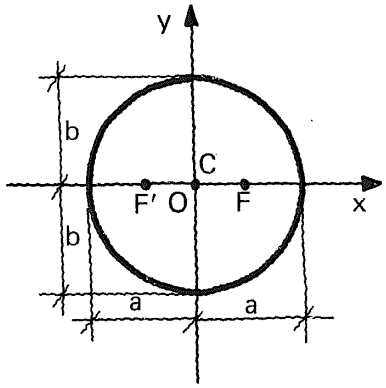
$F \doteq (2.18, 0)$

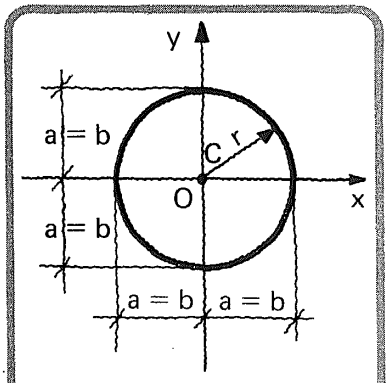
$F' \doteq (-2.18, 0)$

32

Supóngase, ahora, que asignamos a **b** valores cada vez más próximos a **a**, conservando constante el valor de **a**.

¿Qué tendríamos en el límite de este proceso?

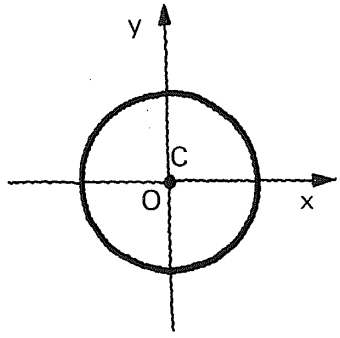




una circunferencia de radio $r = a = b$

33

Dar los focos de este caso particular de elipse.



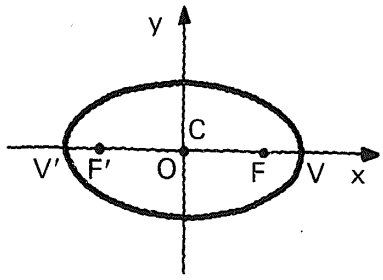
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{a^2 - a^2 = 0}$

$F = F' = C = (0, 0)$

34

Podemos observar que
a medida que la elipse
tiende a
convertirse en un
segmento rectilíneo,
los focos [_____];



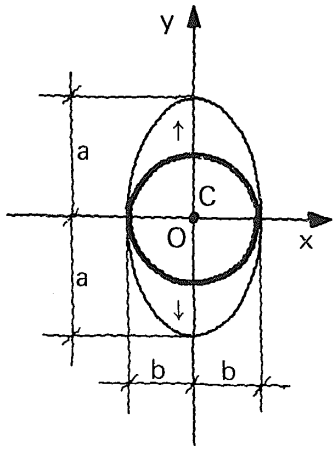
y a medida que la
elipse tiende a
convertirse en una
circunferencia
los focos [_____].

se acercan a los vértices
(o se alejan del centro)

se acercan al centro
(o se alejan de los vértices)

35

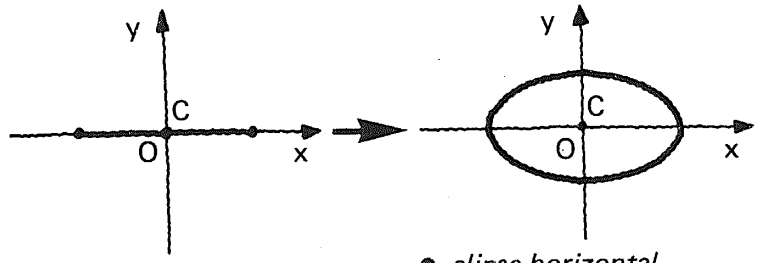
Si el eje de la elipse
contenido en el
eje de las y
sigue aumentando,
deja de ser eje
menor (b)
para convertirse
en
eje mayor (a);
por lo tanto la figura
se transforma en
una elipse vertical.



36

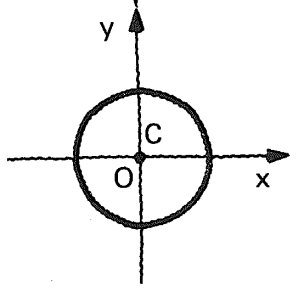
Observar con atención
el
resumen del cuadro siguiente.

37

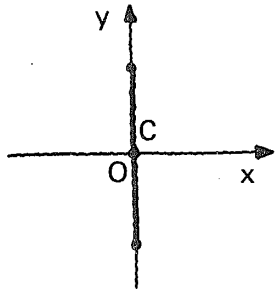


● *elipse horizontal degenerada*

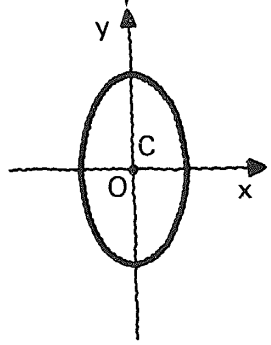
● *elipse horizontal*



● *circunferencia*



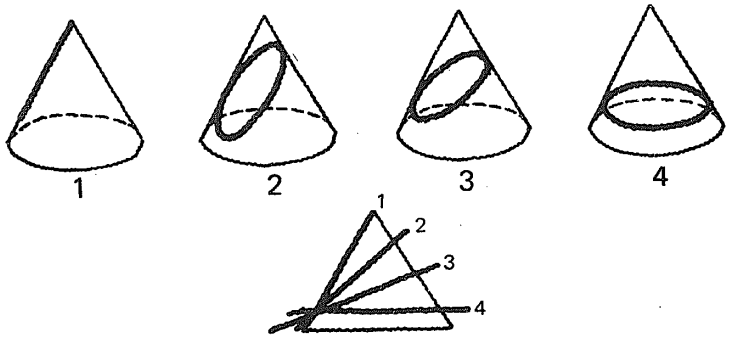
● *elipse vertical degenerada*



● *elipse vertical*

38

Observar con atención cómo pueden generarse los diferentes casos de elipses, al seccionar un cono circular.

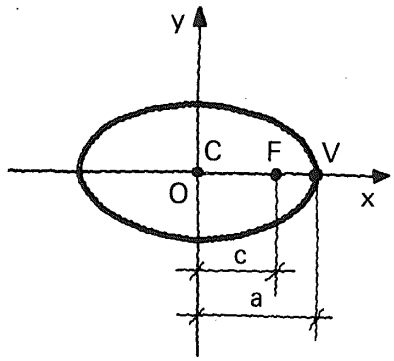


39

A la relación

$\frac{c}{a}$

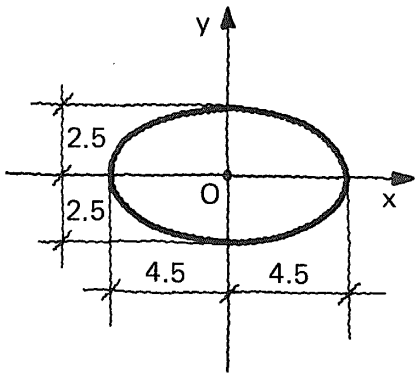
la llamaremos **excentricidad** de la elipse.



40

Por ejemplo, para la elipse representada, la excentricidad

$e =$ _____.



Siendo $e = \frac{c}{a}$ es necesario determinar

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{20.25 - 6.25}$

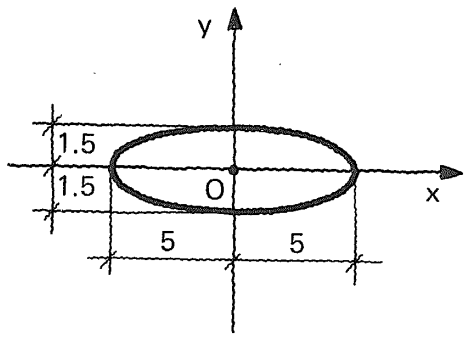
$c = \sqrt{14}$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{14}}{4.5} \doteq 0.83$$

41

La excentricidad de la elipse representada es

$e =$ _____.



$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

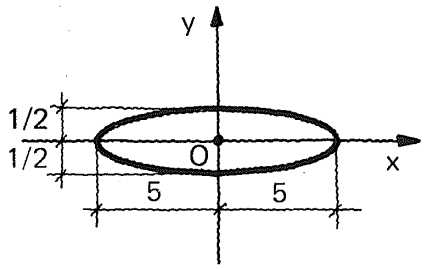
$c = \sqrt{25 - 2.25} =$

$c = \sqrt{22.75} \doteq 4.77$

$$e = \frac{c}{a} \doteq \frac{4.77}{5} \doteq 0.954$$

42

La excentricidad
de la elipse
que aquí se muestra
es



e = ____.

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

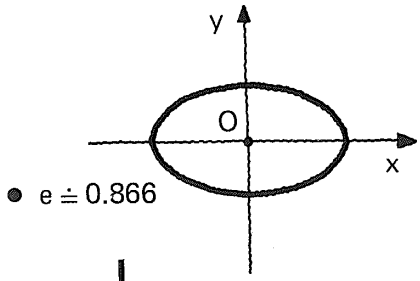
$c = \sqrt{25 - 0.25}$

$c = \sqrt{24.75} \doteq 4.97$

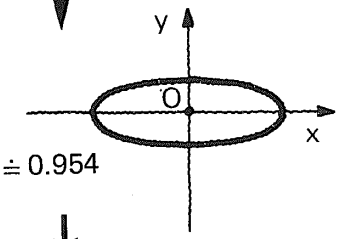
$e \doteq \frac{4.97}{5.00} \doteq 0.994$

43

Observamos que:



- $e \doteq 0.866$



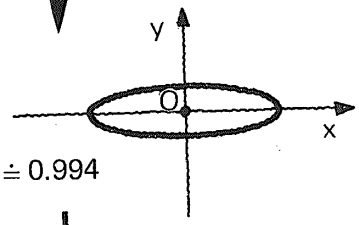
- $e \doteq 0.954$

la excentricidad

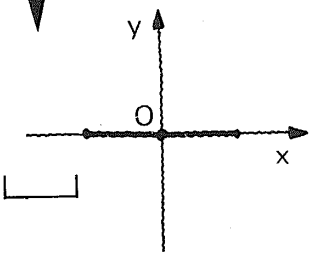
se aproxima a ____

1

a medida que
la elipse
tiende a convertirse
en un segmento de recta.



- $e \doteq 0.994$



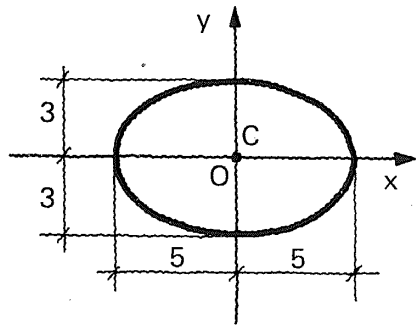
- e = ____

1

44

La excentricidad de la elipse representada es

e = ⌊____⌋



$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9}$

$c = 4$

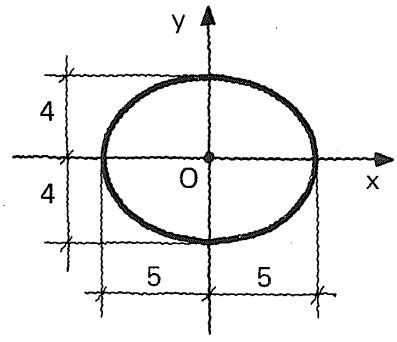
$e = \frac{4}{5} = 0.80$

0.80

45

La excentricidad de la elipse representada es

e = ⌊____⌋



$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{25 - 16} = 3$

$e = \frac{3}{5}$

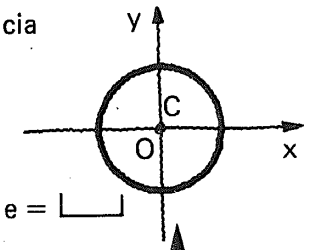
0.60

46

Observemos con atención el esquema presentado en el siguiente cuadro.

47

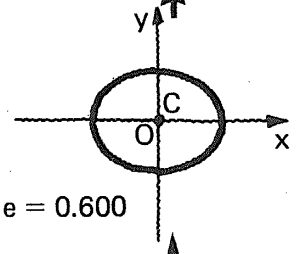
circunferencia



- $e =$ ⌊⌋

0

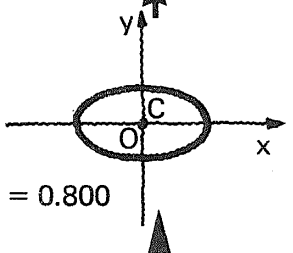
La excentricidad se



- $e = 0.600$

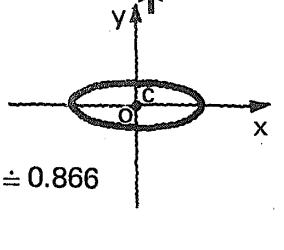
aproxima a ⌊⌋

0



a medida que la elipse tiende a convertirse en una circunferencia.

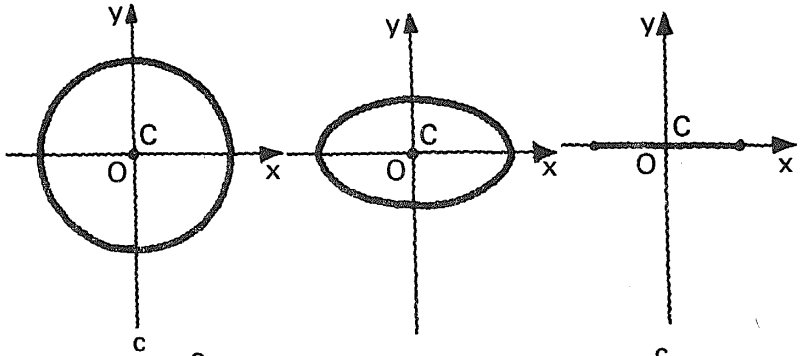
- $e = 0.800$



- $e \doteq 0.866$

48

A manera de resumen.

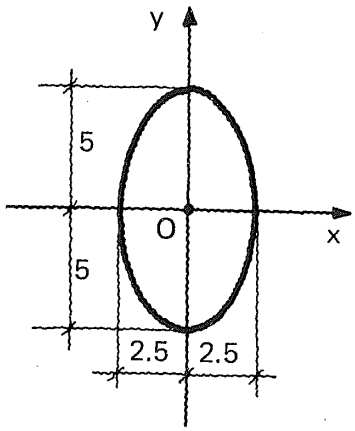


- $e = \frac{c}{a} = 0$
- $0 < e < 1$
- $e = \frac{c}{a} = 1$

49

La excentricidad de la elipse representada es

$e =$ ⌊_____⌋.



$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{25 - 6.25}$

$c = \sqrt{18.75} \doteq 4.33$

$e \doteq \frac{4.33}{5} \doteq 0.866$

0.866

50

En resumen:

Para una circunferencia $e =$ ⌊___⌋

Para una elipse (horizontal o vertical): ⌊_____⌋

Para una elipse degenerada (horizontal o vertical): $e =$ ⌊___⌋

0

$0 < e < 1$

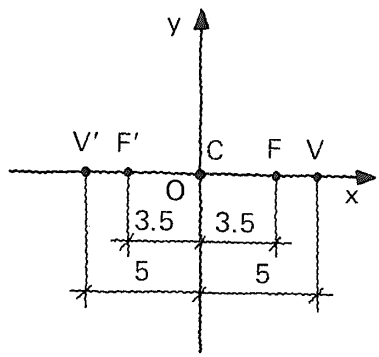
1

51

$a = 5$
$c = 3.5$

$b =$ ⌊_____⌋.

$e =$ ⌊_____⌋.



$b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$b = \sqrt{25 - 12.25}$

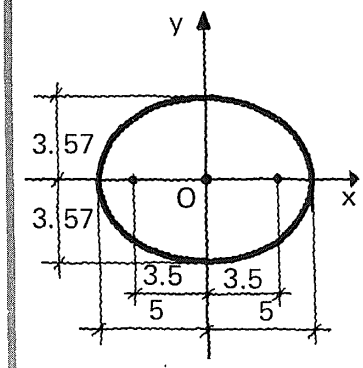
$b = \sqrt{12.75}$

$b \doteq 3.57$

$e = \frac{3.5}{5} = 0.700$

52

Trazar la elipse correspondiente con los datos del cuadro anterior.

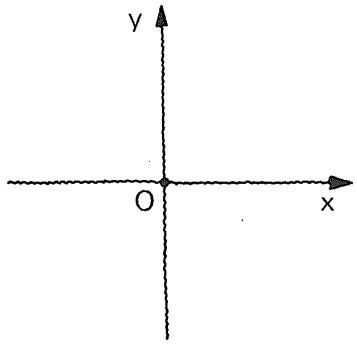


53

En una elipse horizontal:

b = 4

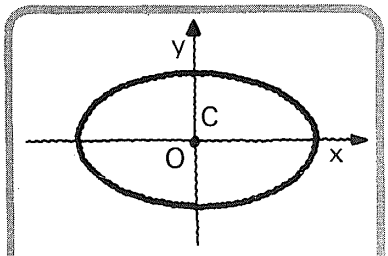
c = 5



a = ⌊_____⌋.

e = ⌊_____⌋.

Trazar la elipse correspondiente.

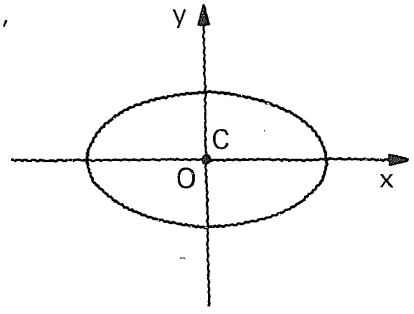


$a = \sqrt{44} \doteq 6.40$

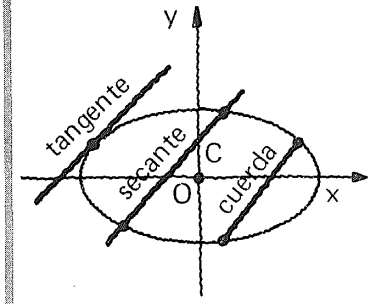
$e \doteq \frac{5}{6.40} \doteq 0.78$

54

Como en una circunferencia, en cualquier elipse podemos hablar de tangentes, secantes y cuerdas. Intentemos trazar algunas tangentes, secantes y cuerdas.

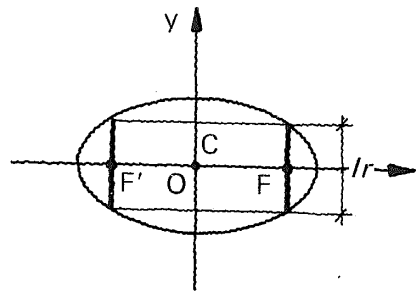


Por ejemplo:



55

La cuerda
perpendicular
el eje mayor,
y
que pasa
por uno de los focos,
se denomina
lado recto *
y la denotaremos
con lr .



*Llamaremos *lado recto* indistintamente a la cuerda y a su medida.

6.4.1.1

Práctica adicional
de determinación de
una de las tres constantes (a, b, c)
de una elipse, dadas
las otras dos,
si se considera necesario.

6.4.1.2

Práctica adicional
de
determinación
de la excentricidad $e = \frac{c}{a}$
de una elipse,
dada la información
suficiente,
si se considera necesario.

6.4.1.3

Práctica adicional
de
determinación de
los vértices y los focos
de una elipse
con centro en el origen,
dadas dos de las
constantes (a, b, c),
si se considera necesario.

6.4.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* una definición de elipse.
- *determinar* una de las tres constantes: a, b o c, dadas las otras dos, a partir de la relación: $a^2 = b^2 + c^2$.
- *dar* los vértices y los focos de una elipse, con centro en el origen a partir de dos de sus constantes (a, b, c).
- *dar* la excentricidad $e = \frac{c}{a}$ de una elipse;
- *identificar* los siguientes elementos de una elipse: eje y semieje mayor, eje y semieje menor, distancia y semidistancia focal; vértices, focos, centro; tangentes, secantes, cuerdas, lado recto;
- *explicar* la relación entre la excentricidad y el grado de "gordura" de una elipse, dando las excentricidades correspondientes a una circunferencia y a una elipse degenerada.

4.2

Ecuación ordinaria de una elipse (horizontal o vertical) con centro en el origen

56

Nos proponemos, ahora,

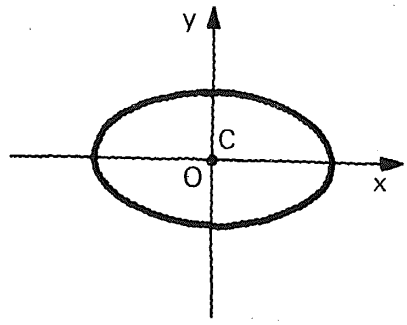
obtener una **ecuación**

de una

elipse horizontal

con

centro en el origen.



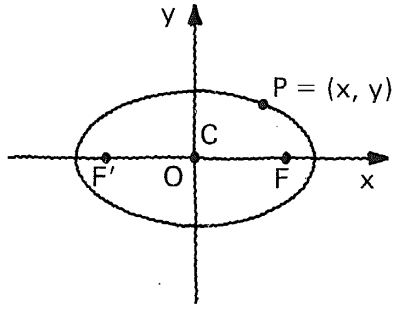
57

Recordemos
la definición de elipse
que hemos dado.

Conjunto de puntos en el plano, tales que la suma de las distancias de cualquiera de ellos a dos puntos fijos llamados focos, es constante.

58

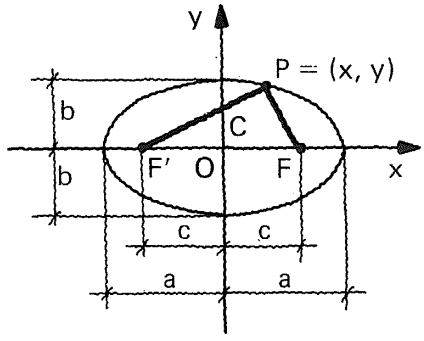
Si P = (x, y)
es un punto cualquiera
perteneciente
a la elipse,
deberá verificarse,
de acuerdo
con la definición:



$\overleftrightarrow{|F'P|} + \overleftrightarrow{|PF|} = k$

59

Hemos encontrado que
en la expresión
$\overleftrightarrow{|F'P|} + \overleftrightarrow{|PF|} = k$
la constante **k**
es igual a



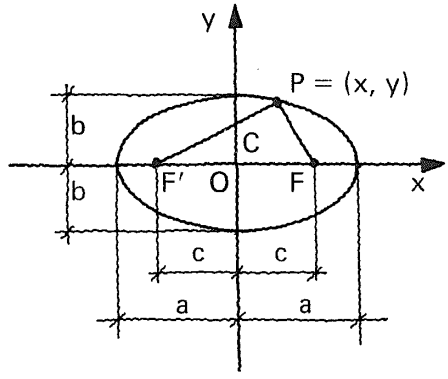
2a

60

Entonces:

$\overleftrightarrow{|F'P|} + \overleftrightarrow{|PF|} = 2a.$

Ahora bien,
podemos expresar
$\overleftrightarrow{|F'P|}$ como la distancia
del punto F' = [ ].
al punto P = [ ].



(− c, 0)

(x, y)

61

$|\overrightarrow{F'P}| + |\overrightarrow{PF}| = 2a$

$F' = (-c, 0)$
$P = (x, y)$

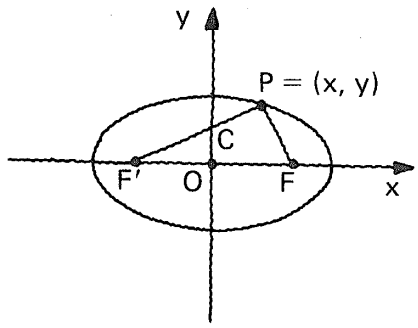
$|\overrightarrow{F'P}| =$ [ ].

$\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$

62

$|\overrightarrow{F'P}| + |\overrightarrow{PF}| = 2a$
$|\overrightarrow{F'P}| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$

Ahora,



$P =$ [ ].

$F =$ [ ].

$|\overrightarrow{PF}| =$ [ ].

(x, y)

$(c, 0)$

$\sqrt{(c - x)^2 + (-y)^2}$
o bien
$\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

63

Puesto que
$|\overrightarrow{F'P}| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$
y
$|\overrightarrow{PF}| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

por sustitución en
$|\overrightarrow{F'P}| + |\overrightarrow{PF}| = 2a$
obtenemos:

[ ]

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

64

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Esta es **una ecuación de la elipse.**

A partir de ella
trataremos de encontrar
una

ecuación más simple.

65

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

1. "Aislemos" el primer radical en el primer miembro.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

66

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

2. Elevemos al cuadrado ambos miembros a fin de eliminar el radical de la izquierda.

$$(x+c)^2+y^2=\left[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$$

67

$$(x + c)^2 + y^2 = \left[2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right]^2$$

3. Desarrollemos el binomio cuadrático del segundo miembro.

$(x + c)^2 + y^2$
$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$
$+ (x - c)^2 + y^2$

68

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

4. Aislemos el término que contiene al radical, en el segundo miembro.

$(x + c)^2 + y^2 - 4a^2$
$- (x - c)^2 - y^2$
$= - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

69

$$(x + c)^2 + y^2 - 4a^2 - (x - c)^2 - y^2 = - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

5. Simplifiquemos lo más que podamos el primer miembro.

$4(cx - a^2)$
$= - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

70

$$4(cx - a^2) = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

6. Multipliquemos por $-\frac{1}{4}$ ambos miembros.

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

71

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

7. Elevemos al cuadrado los dos miembros para eliminar el radical en el segundo miembro.

$$(a^2 - cx)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$

72

$$(a^2 - cx)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$

8. Desarrollemos los binomios cuadráticos a uno y otro lado de la ecuación.

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

73

$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$

9. Efectuemos el producto indicado en el segundo miembro.

$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$
$= a^2x^2 - 2a^2cx$
$+ a^2c^2 + a^2y^2$

74

$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$

10. Reduzcamos términos semejantes.

$a^4 + c^2x^2$
$= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$

75

$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$

11. Reunamos en el primer miembro todos los términos en x^2 o y^2; y en el segundo, los términos constantes.

$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2$
$= a^2c^2 - a^4$

76

$\underline{c^2x^2 - a^2x^2} - a^2y^2 = \underline{a^2c^2 - a^4}$

12. Factoricemos los binomios señalados.

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

77

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

13. Recordemos la relación pitagórica entre **a, b** y **c**, y obtengamos de acuerdo con ella:

$c^2 - a^2 =$ [ ].

$a^2 = b^2 + c^2$

$c^2 - a^2 = -b^2$

$-b^2$

78

$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

14. Sustituyamos: $c^2 - a^2 = -b^2$

$-b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2$

79

$-b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2$

15. Multipliquemos ambos miembros por (-1).

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

80

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

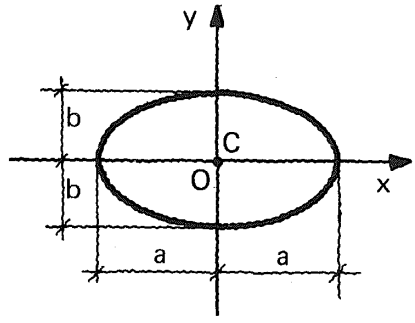
16. Dividamos ambos miembros entre a^2b^2.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

81

Obtenemos esta ecuación simplificada de una **elipse horizontal con centro en el origen.**

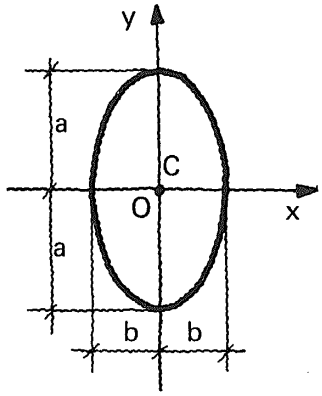
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge a > b$

82

En forma análoga
podemos obtener la ecuación
simplificada para
una **elipse vertical**
con centro en el origen.



└──────────────────────┘.

Intentemos la deducción de la ecuación correspondiente.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge a > b$

6.4.2

En este punto el alumno de ser capaz de:

- *obtener* la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

para una elipse horizontal con centro en el origen
y la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

para una elipse vertical con centro en el origen.

4.3

Ecuación de una elipse horizontal o vertical con centro en el origen. Ejercicios.

83

Se requiere
una ecuación de una
elipse horizontal con centro en el origen,
con
semieje mayor igual a 5,
y
semieje menor igual a 3.

84

Expresión general para una elipse como la especificada.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

85

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Datos:

a = ____.

b = ____.

Por lo tanto:

____

5

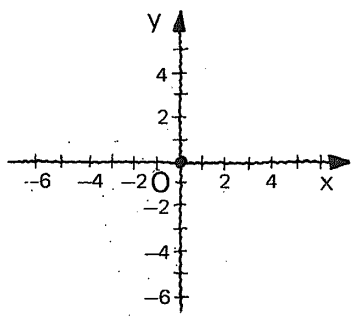
3

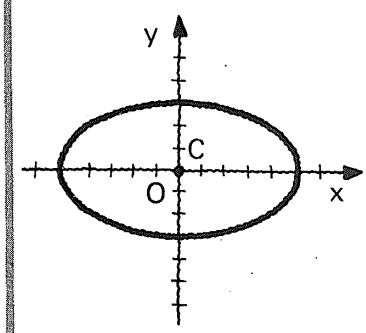
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

86

Representar gráficamente.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$





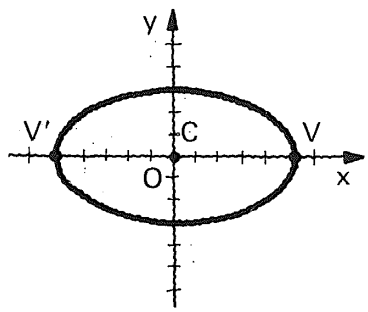
87

Los vértices de esta elipse son los puntos:

V = ____

y

V′ = ____.



(5, 0)

(− 5, 0)

88

Los pares ordenados (5, 0) y (− 5, 0)

satisfacen/no satisfacen

la ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

porque

satisfacen

$$\frac{(5)^2}{25} + \frac{(0)^2}{9} = 1$$

$1 = 1 \leftarrow$ PCV*

$$\frac{(-5)^2}{25} + \frac{(0)^2}{9} = 1$$

$1 = 1 \leftarrow$ PCV

* PCV = proposición cerrada verdadera

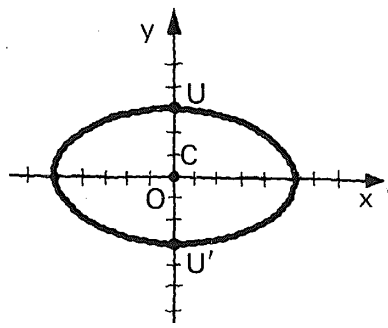
89

También:

U = (0, 3)

y

U′ = (0, − 3)



90

Los pares ordenados (0, 3) y (0, − 3)

satisfacen/no satisfacen

la ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

porque

satisfacen

$$\frac{0}{25} + \frac{3^2}{9} = 1$$

$1 = 1 \leftarrow$ PCV

$$\frac{0}{25} + \frac{(-3)^2}{9} = 1$$

$1 = 1 \leftarrow$ PCV

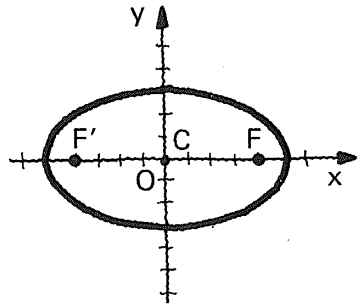
91

Los focos de la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

son:

$F = \underline{\qquad\qquad}$,
y
$F' = \underline{\qquad\qquad}$.



$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{25 - 9}$

$c = \sqrt{16}$

$c = 4$

(4, 0)

(− 4, 0)

92

Los pares ordenados (4, 0) y (−4, 0)

satisfacen/no satisfacen

la ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

porque

no satisfacen

$$\frac{4^2}{25} + \frac{0}{9} = 1$$

$$\frac{16}{25} = 1 \leftarrow \text{PCF*}$$

$$\frac{(-4)^2}{25} + \frac{0}{9} = 1$$

$$\frac{16}{25} = 1 \leftarrow \text{PCF}$$

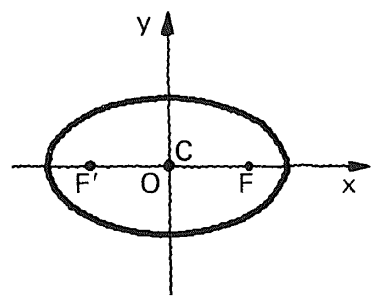
*PCF = Proposición cerrada falsa

93

Debemos observar que

los focos no pertenecen a la elipse,

es decir,



$$F, F' \notin \left\{ (x, y) \middle| (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \wedge a, b \in \mathbb{R} \wedge a > b \right\}$$

94

El par ordenado A = (2, 4)

satisface/no satisface

la ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

porque

no satisface

$$\frac{2^2}{25} + \frac{4^2}{9} = 1$$

$$\frac{436}{225} = 1 \leftarrow \text{PCF}$$

95

Decimos que
el punto A = (2, 4)

pertenece/no pertenece

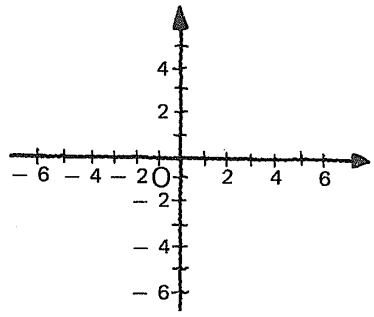
a la elipse.

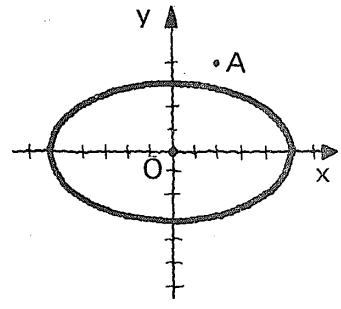
no pertenece

96

Trazar la gráfica
para verificar que
el punto A = (2, 4)
no pertenece a la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



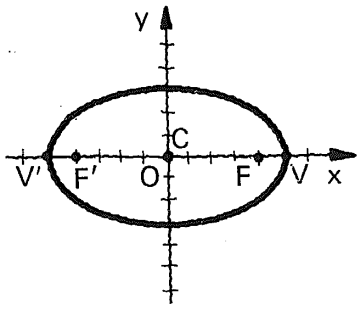


97

En resumen,
podemos escribir para la

elipse: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

- Centro C = [ ].
- Vértices { V = [ ]. V′ = [ ]. }
- Focos { F = [ ]. F′ = [ ]. }



(0, 0)

(5, 0)

(− 5, 0)

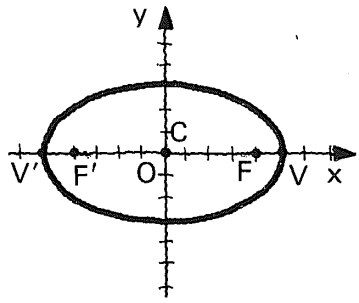
(4, 0)

(− 4, 0)

98

También:

- Semieje mayor a = [ ].
- Semieje menor b = [ ].
- Semidistancia focal c = [ ].
- Eje mayor 2a = [ ].
- Eje menor 2b = [ ].
- Distancia focal 2c = [ ].



5

3

4

10

6

8

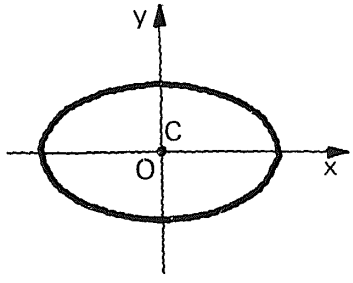
99

Dada la ecuación

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

determinar el valor de
la excentricidad:

e = [ ] = [ ].
↑
expresión
general



$\frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.80$

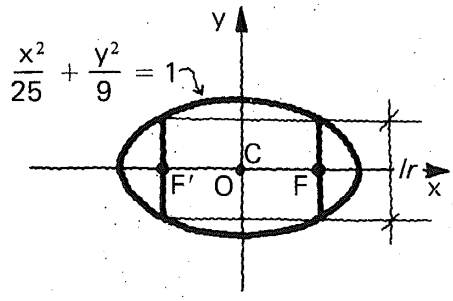
100

Ahora,
se requiere
determinar
el

lado recto

de la elipse.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



Intentemos trazar un plan.

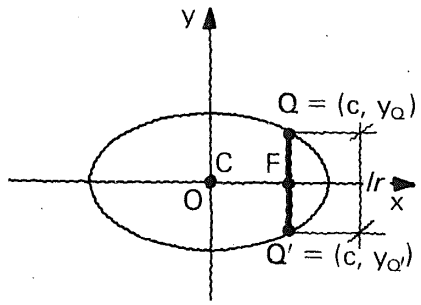
101

Empezamos
por observar que:

el lado recto es igual
al doble del valor absoluto
de la ordenada de Q,
(o de la ordenada de Q′*).*

Es decir:

$lr = 2|y_Q| = 2|y_{Q'}|$



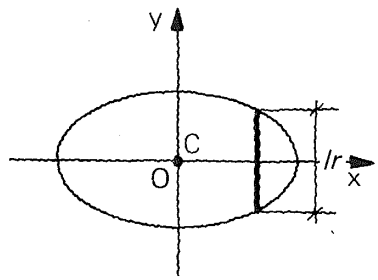
102

Escribimos:

Q = ⌊_____⌋

y

Q′ = ⌊_____⌋.



(c, y_Q)

$(c, y_{Q'})$

103

De la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Obtenemos:

$y =$ [ ]

$$\pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

104

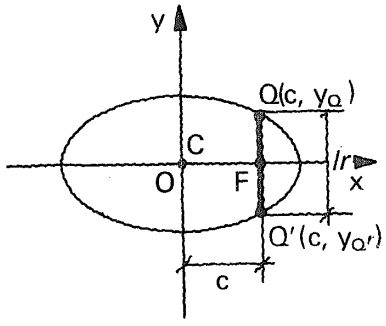
$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Para $x = c$, tenemos:

$Y_Q =$ [ ]

o

$Y_{Q'} =$ [ ]



$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$-\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$$

105

Puesto que

$$lr = 2|y_Q| = 2|y_{Q'}|$$

y además

$$y_Q = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$$

y

$$y_{Q'} = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$$

podemos escribir:

$lr =$ [ ]

o

$lr =$ [ ]

$$2\left|\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}\right|$$

$$2\left|-\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}\right|$$

106

Señalar la opción correcta.

Hemos obtenido:

$$lr = 2\left|\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}\right| = 2\left|-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}\right|$$

Ahora bien,
como a^2 y c^2 son siempre positivos
y $a^2 > c^2$ (puesto que $a > c$)

entonces el radical $\sqrt{a^2 - c^2}$ es
- siempre positivo
- siempre negativo
- algunas veces positivo y algunas veces negativo

siempre positivo

107

$$lr = 2\left|\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}\right| = 2\left|-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}\right|$$

Como sabemos que:

$a, b \in \mathbb{R}^+$ y $\sqrt{a^2 - c^2} > 0$

podemos escribir, quitando los signos de valor absoluto:

$lr =$ [_____].

$$\frac{2b\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$$

108

Si recordamos que

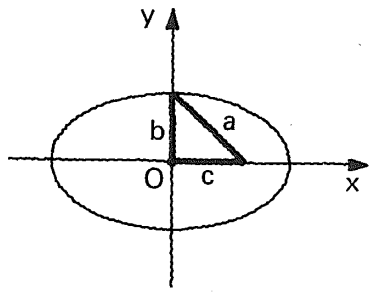
$\sqrt{a^2 - c^2} =$ [_____].

la expresión

$$lr = \frac{2b\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$$

puede ser escrita
en forma más compacta:

$lr =$ [_____].



b

109

Para la elipse que habíamos considerado:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

en que:

a = 5
b = 3
c = 4

el lado recto es:

$lr = [\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{expresión general}}] = [\qquad\qquad]$.

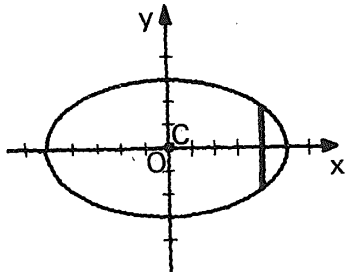
$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$$

110

Mediante la correspondiente gráfica cartesiana de la elipse considerada, podemos verificar que efectivamente:

$lr = 3.6$

con la exactitud que nos permita la precisión de la gráfica.



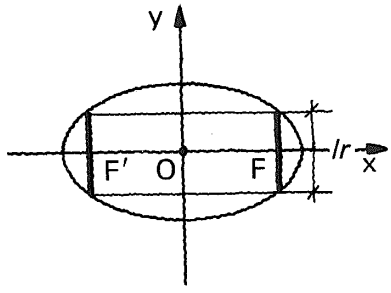
111

Debemos observar que en una elipse hay

dos lados rectos

que tienen la misma medida, determinable por la expresión:

$$lr = \frac{2b^2}{a}$$



112

Se requiere encontrar ahora
una ecuación
de la elipse con centro en el origen
cuyos vértices
son los puntos

$V = (0, 3.7)$
$V' = (0, -3.7)$

y con excentricidad

$$e = \frac{c}{a} = 0.75$$

113

Se trata de una elipse **vertical/horizontal**,
ya que
los vértices se encuentran en el eje de las ____;
por lo tanto, la expresión general de su ecuación es

_____.

vertical

y

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

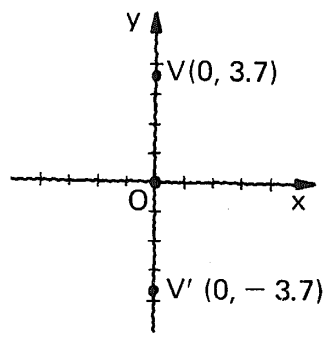
114

Una vez obtenida
la expresión general

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

podemos observar que

a = _____.



3.7

115

Sabemos que una ecuación
de la elipse considerada
tiene la forma:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

y que:

$$a = 3.7$$

Pero,
para que la ecuación quede bien determinada
se requiere conocer b. ¿Podemos hacerlo?

116

Puesto que

$$e = \frac{c}{a} = 0.75 \text{ y } a = 3.7$$

c = ⌊_____⌋

y recordando la relación pitagórica existente
entre a, b y c:

b = ⌊_____⌋ ≐ ⌊_____⌋.
expresión general

$$0.75 \times 3.7 \doteq 2.77$$

$$\sqrt{a^2 - c^2} \doteq \sqrt{3.7^2 - 2.77^2}$$
$$\doteq 2.45$$

117

Si tenemos la expresión general

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

y sabemos que

$$a = 3.7$$
$$b = 2.45$$

la ecuación solicitada es:

⌊_____⌋

$$\frac{x^2}{2.45^2} + \frac{y^2}{3.7^2} = 1$$

o bien

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{13.69} = 1$$

118

Si tenemos la ecuación

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{13.69} = 1$$

sabemos que:

semieje mayor = [ ],

semieje menor = [ ],

semidistancia focal = [ ],

eje mayor = [ ],

eje menor = [ ],

distancia focal = [ ].

$\sqrt{13.69} \doteq 3.7$

$\sqrt{6} \doteq 2.45$

2.77

7.40

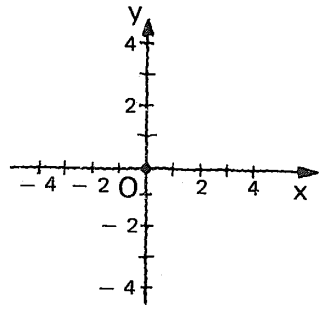
4.90

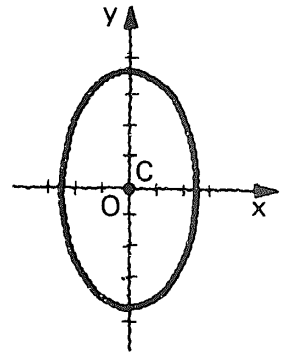
5.54

119

Trazar la gráfica cartesiana de la elipse

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{13.69} = 1$$





120

Centro:

C = [ ].

Vértices:

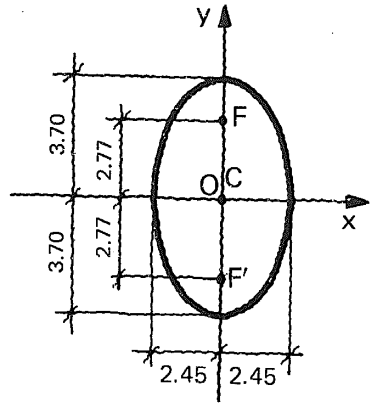
V = [ ]

V′ = [ ] } datos

Focos:

F = [ ].

F′ = [ ],



(0, 0)

(0, 3.7)

(0, − 3.7)

(0, 2.77)

(0, − 2.77)

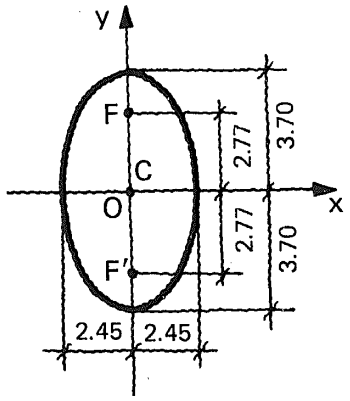
121

excentricidad:

$e = \frac{\square}{\square} = \square$ dato

lado recto:

$lr = \underset{\text{expresión general}}{\square} = \square$



$\frac{2.77}{3.70} \doteq 0.75$

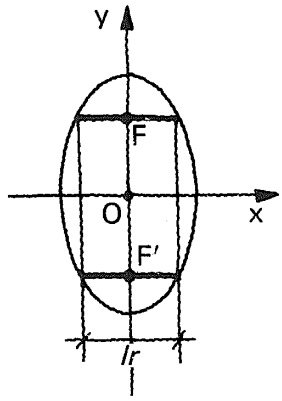
$\frac{2b^2}{a} = \frac{2x2.45^2}{3.70} \doteq 3.24$

122

Aunque
la expresión

$$lr = \frac{2b^2}{a}$$

ha sido deducida
para una elipse horizontal,
puede demostrarse
que es válida también
para una elipse vertical.



6.4.3.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

6.4.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* una ecuación de una elipse (vertical u horizontal) con centro en el origen, a partir de la información suficiente;

- *dar* los siguientes elementos de una elipse (vertical u horizontal) con centro en el origen:

  — eje y semieje mayor,
  — eje y semieje menor,
  — distancia y semidistancia focal,
  — vértices,
  — focos,
  — excentricidad,
  — lado recto.

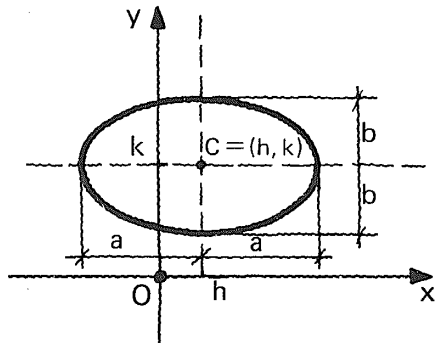
4.4

Ecuación de una elipse horizontal o vertical con centro en un punto cualquiera

123

Una ecuación de una elipse horizontal con centro en un punto
$\mathbf{C = (h, k)}$
es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Justificaremos esto más adelante.

124

Comparemos.

- Circunferencia con centro en el origen:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- Elipse horizontal con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Circunferencia con centro en $C = (h, k)$:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

- Elipse horizontal con centro en $C = (h, k)$:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

125

Similarmente, podríamos escribir:

- Elipse vertical con centro en el origen: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
- Elipse vertical con centro en C = (h, k): $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

126

Generalizando,
para transformar una ecuación
de una cónica con centro en el origen
de una ecuación
de una cónica con centro en C = (h, k)

se sustituye

x por $\longrightarrow (x - h)$

e

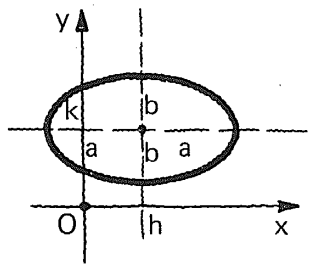
y por $\longrightarrow (y - k)$

127

Ecuación de una elipse horizontal con centro en C = (h, k)

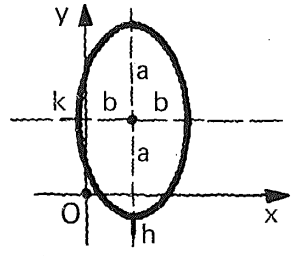
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- $h, k \in \mathcal{R}$
- $a, b \in \mathcal{R}^+$
- $a > b$



$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

ecuación de una elipse vertical con centro en C = (h, k)

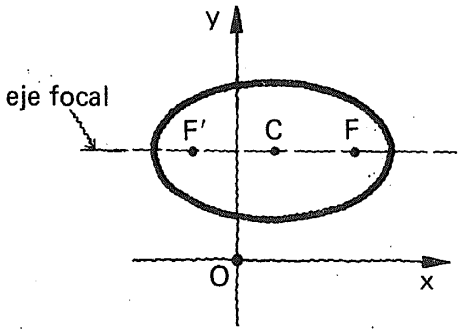


128

Llamaremos

eje focal

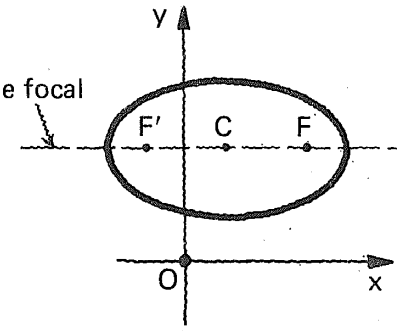
de una elipse
a la recta que
contiene a los focos.



129

El eje focal de una
elipse
contiene
al

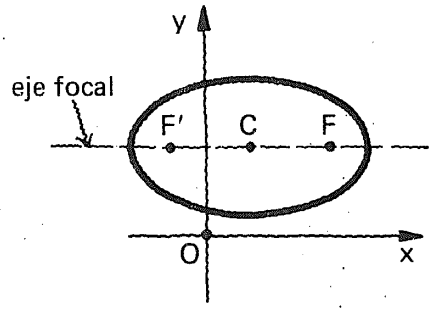
eje **mayor/menor.**



mayor

130

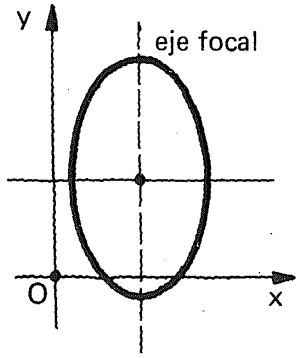
El eje focal
de una elipse horizontal
es
paralelo
al eje de las[_____].



x

131

El eje focal
de una elipse vertical
es
paralelo
al eje de las ____.

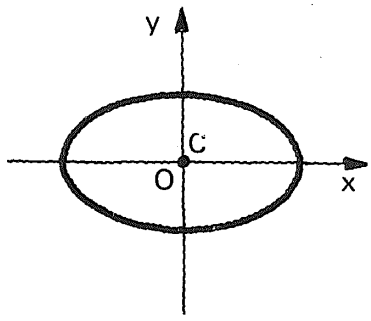


y

132

El eje focal
de una
elipse horizontal
con
centro en el origen
coincide con

____

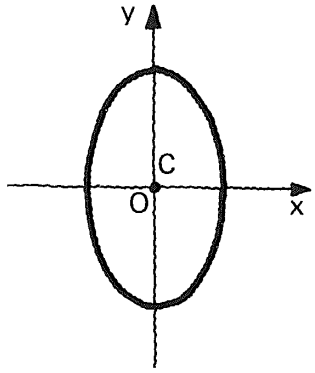


el eje de las x

133

El eje focal
de una
elipse vertical
con
centro en el origen
coincide con

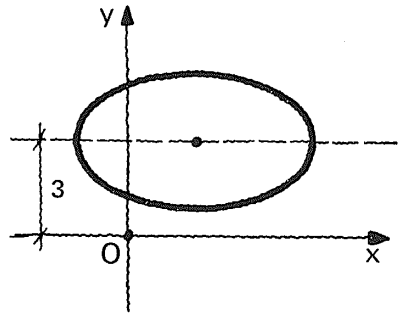
____



el eje de las y

134

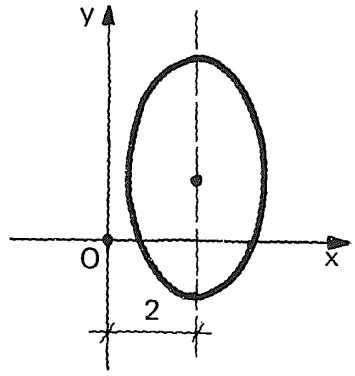
Una ecuación
del eje focal
de la elipse representada
es



$y = 3$ ó $y - 3 = 0$

135

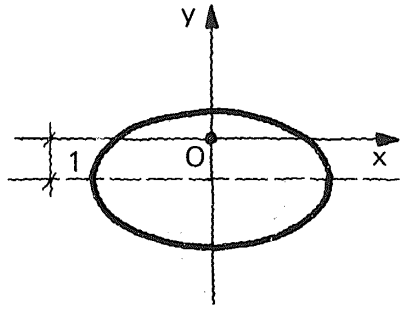
Una ecuación
del eje focal
de la elipse representada
es



$x = 2$ ó $x - 2 = 0$

136

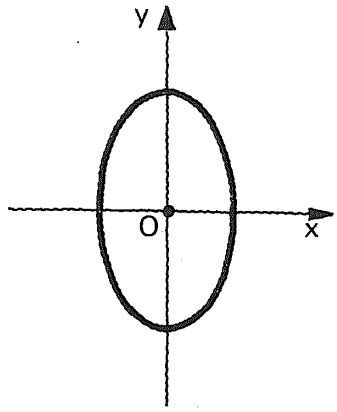
Una ecuación
del eje focal
de la elipse representada
es



$y = -1$ ó $y + 1 = 0$

137

Una ecuación del eje focal de la elipse representada es



$x = 0$

6.4.4.1

Práctica adicional, si se considera necesario.

138

Para la elipse representada:

Centro:

C = [ ].

Vértices:

V = [ ].

V′ = [ ].

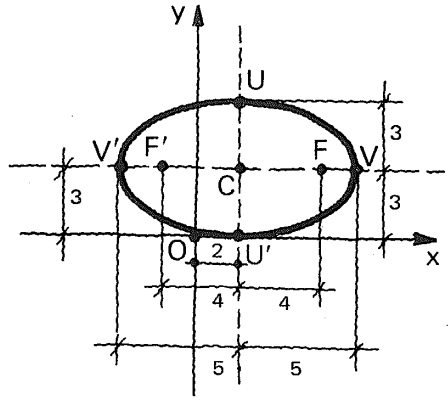
Focos:

F = [ ].

F′ = [ ].

U = [ ].

U′ = [ ].



(2, 3)

(7, 3)

(− 3, 3)

(6, 3)

(− 2, 3)

(2, 6)

(2, 0)

139

En general,
para una elipse horizontal.

Centro:

C = |_____|.

Vértices:

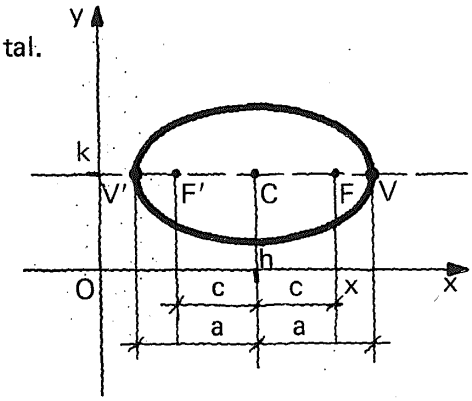
V = |_____|.

V′ = |_____|.

Focos:

F = |_____|.

F′ = |_____|.



(h, k)

(h + a, k)

(h − a, k)

(h + c, k)

(h − c, k)

140

En general,
para una elipse vertical.

Centro:

C = |_____|.

Vértices:

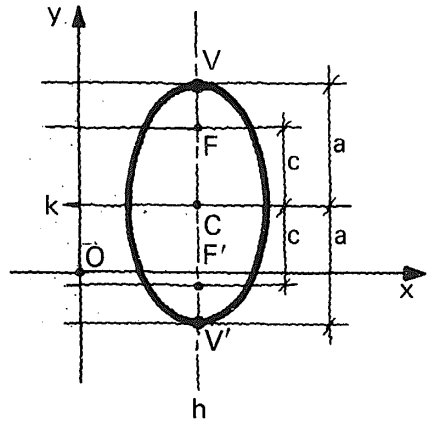
V = |_____|.

V′ = |_____|.

Focos:

F = |_____|.

F′ = |_____|.



(h, k)

(h, k + a)

(h, k − a)

(h, k + c)

(h, k − c)

6.4.4.2

Práctica adicional
de
determinación de
los vértices y los focos
de una elipse (horizontal o vertical)
dados C = (h, k), a y c,
o su gráfica cartesiana,
si se considera necesario.

141

Queremos una ecuación de la elipse horizontal
con centro en (3, 5),
con eje mayor igual a 6,
y eje menor igual a 4.

142

Expresión general
de la ecuación
requerida:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

143

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

C = (3, 5)

h = 3.

k = 5.

a = 3.

b = 2.

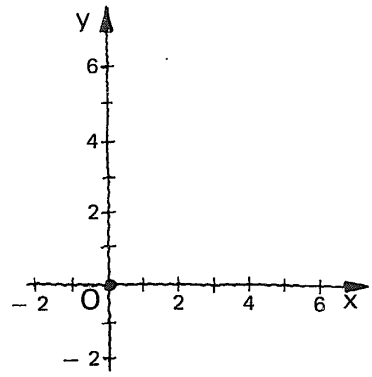
Ecuación
requerida:

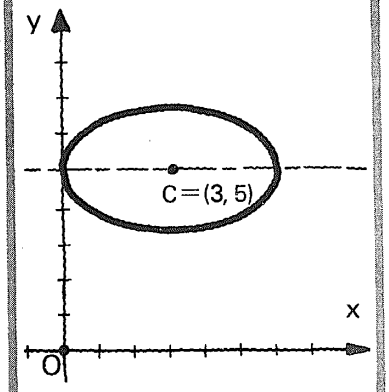
$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{4}=1$$

144

Trazar la gráfica cartesiana correspondiente a la ecuación

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$$



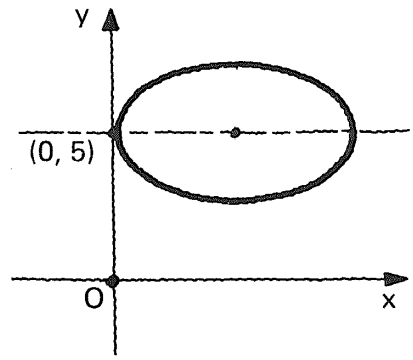


145

El par ordenado (0, 5) **satisface/no satisface** la ecuación

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$$

puesto que:



satisface

$$\frac{(0-3)^2}{9} + \frac{(5-5)^2}{4} = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

PCV → $1 = 1$

146

De la ecuación

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$$

deducimos que
la semidistancia focal es igual a

puesto que:

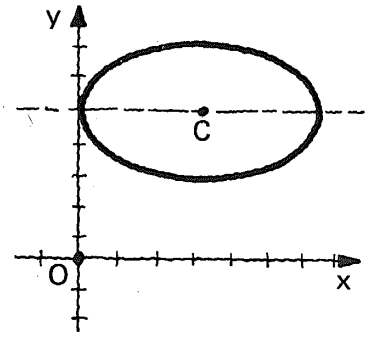
$\sqrt{5} \doteq 2.24$

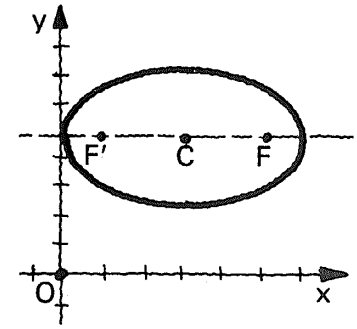
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$
$c = \sqrt{3^2 - 2^2}$
$c = \sqrt{9 - 4}$
$c = \sqrt{5} \doteq 2.24$

147

Si $c = \sqrt{5} \doteq 2.24$

representar gráficamente los focos.





148

Vértices:

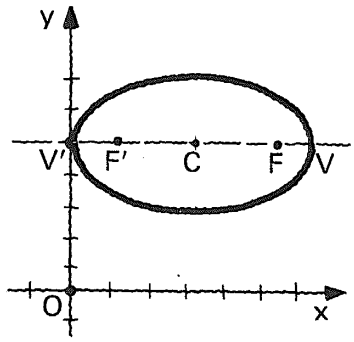
V = ⌊_____⌋.

V′ = ⌊_____⌋.

Focos:

F = ⌊_____⌋.

F′ = ⌊_____⌋.



(6, 5)

(0, 5)

$(3 + \sqrt{5}, 5)$

$(3 - \sqrt{5}, 5)$

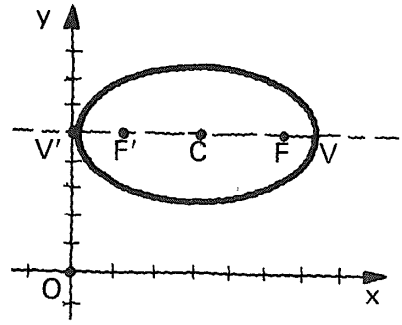
149

El eje focal de esta elipse es una recta paralela a

⌊_____⌋

y una de sus ecuaciones es

⌊_____⌋



el eje de las x

$y = 5$ ó $y - 5 = 0$

150

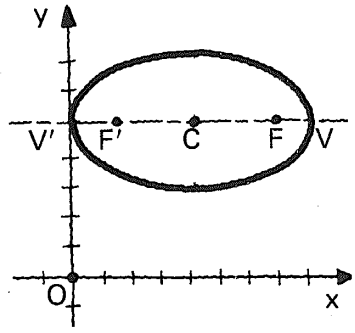
La excentricidad de la elipse

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{4}=1$$

es

$e=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}=\square.$

expresión general



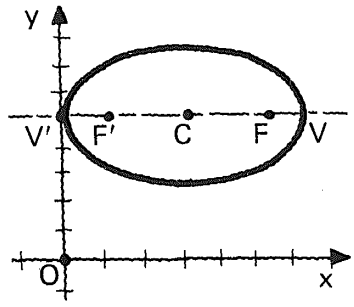
$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\doteq\frac{2.24}{3}\doteq 0.75$$

151

Lado recto:

$lr=\square=\square=\square.$

↑ expresión general



$$\frac{2b^2}{a}=\frac{2x4}{3}=\frac{8}{3}\doteq 2.67$$

Verificar gráficamente.

152

Dar una ecuación de la elipse con centro en $(-2,-3)$, vértices en $(-2,2)$ y $(-2,-8)$ y con excentricidad igual a $\frac{1}{2}$.

153

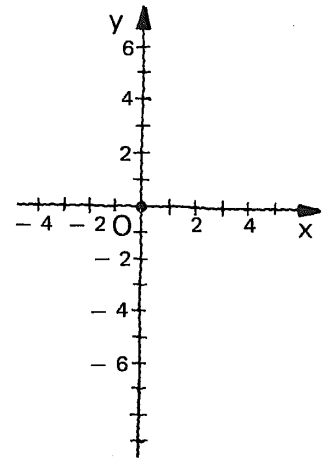
La representación gráfica de los elementos dados nos revela que el eje focal es una recta paralela a

[ ],

y una de sus ecuaciones es

[ ],

por lo cual la elipse es **vertical/horizontal.**



el eje de las y

$x = -2$ ó $x + 2 = 0$

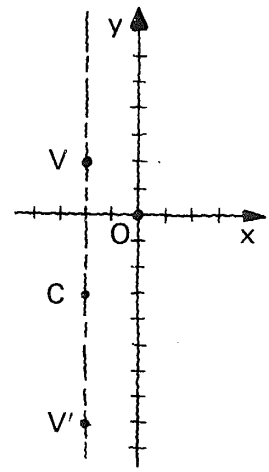
vertical

Ver gráfica en el cuadro siguiente.

154

Tratándose de una elipse vertical, una de sus ecuaciones tiene la forma

[ ].



$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

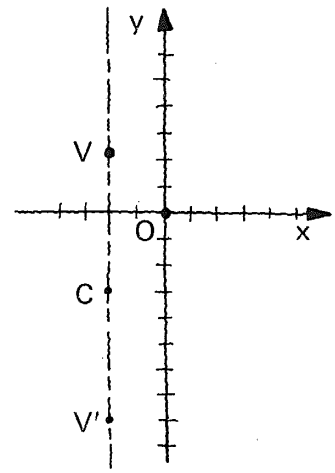
155

Expresión general:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Podemos observar en la gráfica, que

a = [ ].



5

156

Expresión general.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$a = 5$

Determinación de **b**:

$b =$ _____.

$e = \frac{c}{a}$ de donde:

$c = (e)(a) = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$b = \sqrt{5^2 - \frac{5^2}{2^2}} = \sqrt{25 - \frac{25}{4}}$

$b = \frac{\sqrt{100-25}}{2} = \frac{\sqrt{75}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\frac{5\sqrt{3}}{2} \doteq 4.33$

157

Expresión general.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$C =$ _____ dato

$a = 5$

$b = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Ecuación requerida:

_____

$(-2, -3)$

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{75}{4}}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$$

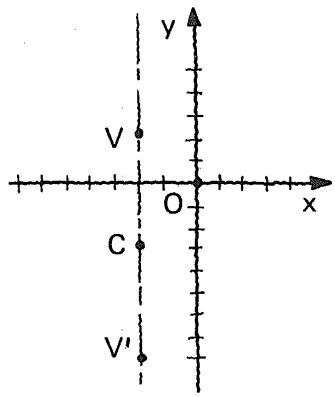
o bien

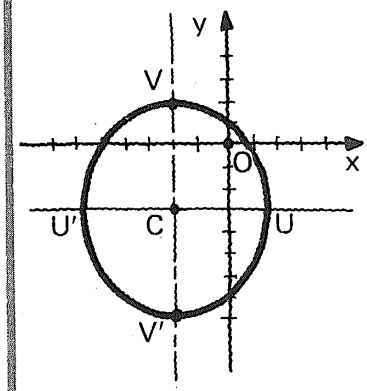
$$\frac{(x+2)^2}{18.75}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$$

158

Completar la gráfica cartesiana de la elipse

$$\frac{(x+2)^2}{18.75}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$$



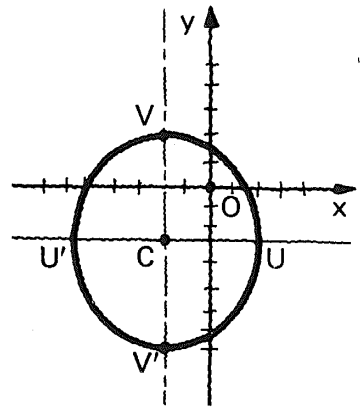


159

Vamos a determinar, a manera de verificación, los puntos de intersección de la elipse

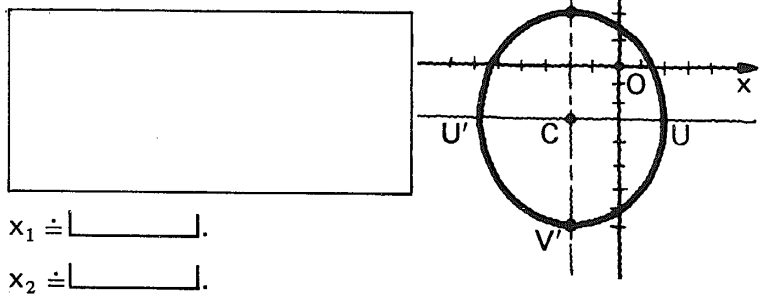
$$\frac{(x+2)^2}{18.75} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

con los ejes coordenados.



160

Determinación de las intersecciones con el eje de las x para y = [ ]



$x_1 \doteq$ [ ].

$x_2 \doteq$ [ ].

0

Ver desarrollo en el cuadro siguiente.

1.46

− 5.46

161

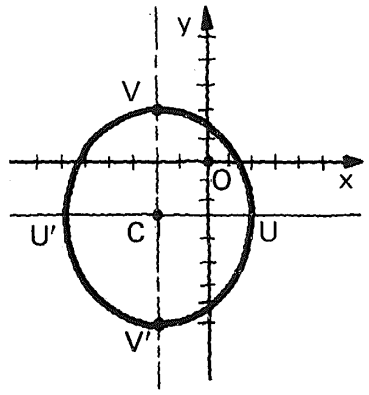
- $\frac{(x+2)^2}{18.75} + \frac{(0+3)^2}{25} = 1$
- $\frac{(x+2)^2}{18.75} + \frac{9}{25} = 1$
- $\frac{(x+2)^2}{18.75} = \frac{16}{25}$
- $(x+2)^2 = 12$
- $x^2 + 4x + 4 = 12$
- $x^2 + 4x - 8 = 0$

Resolución de la ecuación: $x^2 + 4x - 8 = 0$

- $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+32}}{2}$
- $x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{2}$
- $x = -2 \pm 2\sqrt{3}$
- $x_1 = -2 + 2\sqrt{3} \doteq 1.46$
- $x_2 = -2 - 2\sqrt{3} \doteq -5.46$

162

Determinación de las intersecciones con el eje de las y, para x =



$y_1 =$ ⌊_____⌋.

$y_2 =$ ⌊_____⌋.

0

Ver desarrollo en el cuadro siguiente.

1.43

−7.43

163

$$\frac{(0+2)^2}{18.75} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

$$\frac{4}{18.75} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

$$\frac{(y+3)^2}{25} \doteq 0.7867$$

$$(y+3)^2 \doteq 19.67$$

$$(y^2 + 6y + 9 \doteq 19.67$$

$$y^2 + 6y - 10.67 \doteq 0$$

$$y \doteq \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 42.68}}{2}$$

$$y \doteq \frac{-6 \pm 8.87}{2}$$

$$y \doteq -3 \pm 4.43$$

$$y_1 \doteq 1.43$$

$$y_2 \doteq -7.43$$

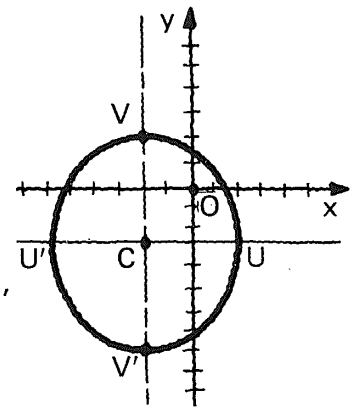
164

Para la elipse

$$\frac{(x+2)^2}{18.75} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

tenemos:

- semieje mayor =⌊_____⌋,
- semieje menor =⌊_____⌋,
- semidistancia focal =⌊_____⌋,
- eje mayor =⌊_____⌋,
- eje menor =⌊_____⌋,
- distancia focal =⌊_____⌋.



5

$\frac{5\sqrt{3}}{2} = \sqrt{18.75} \doteq 4.33$

$\frac{5}{2} = 2.50$

10

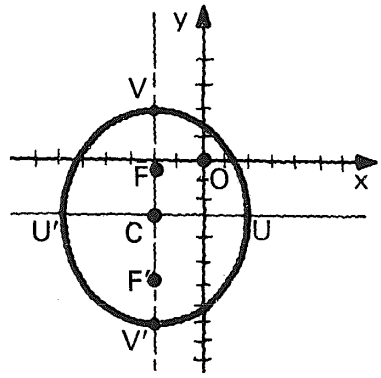
$5\sqrt{3} \doteq 8.66$

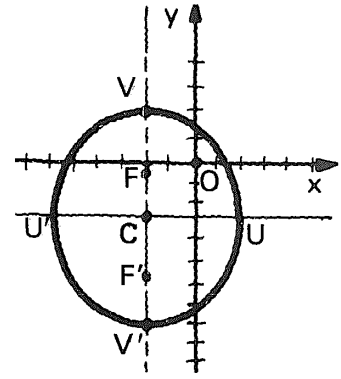
5

165

Trazar
en la gráfica
de los focos de

$$\frac{(x+2)^2}{18.75}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$$





166

Vértices:

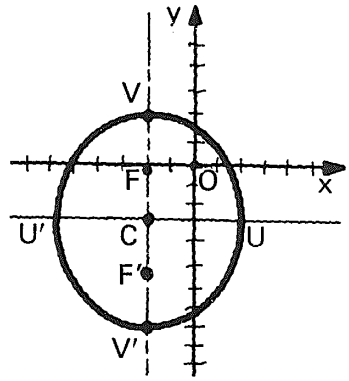
V = ____.

V′ = ____.

Focos:

F = ____.

F′ = ____.



(− 2, 2)
(− 2, − 8)
} datos

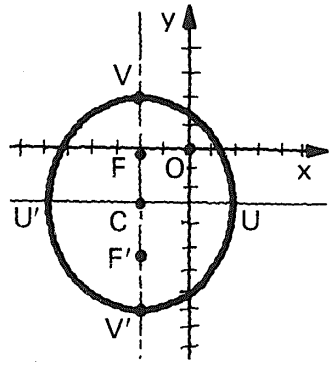
$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$

$\left(-2,-5\frac{1}{2}\right)$

167

Lado recto:

lr = ____.



$$lr=\frac{2b^2}{a}$$

$$lr=\frac{2\times 18.75}{5}$$

$$lr=7.5$$

Verificar en la gráfica.

6.4.4.3

Práctica adicional,
si se considera necesario.

168

Dar los siguientes elementos
de la elipse

$$\frac{(x-4)^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{1}=1$$

centro = ⌊ ⌋,
semieje mayor = ⌊ ⌋,
semieje menor = ⌊ ⌋
semidistancia focal = ⌊ ⌋,
eje mayor = ⌊ ⌋,
eje menor = ⌊ ⌋,
distancia focal = ⌊ ⌋.

La ecuación dada representa una elipse **vertical/horizontal.**

$(4, -1)$
$\sqrt{3}$
1
$\sqrt{2}$
$2\sqrt{3}$
2
$2\sqrt{2}$
horizontal

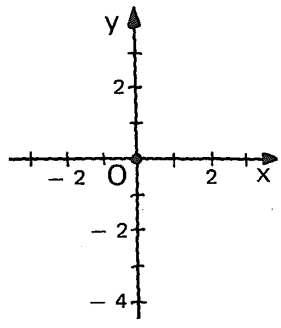
169

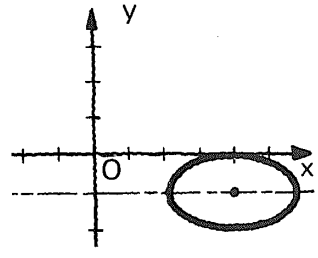
Trazar la gráfica cartesiana
de la elipse

$$\frac{(x-4)^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{1}=1$$

en que:

$a = \sqrt{3}$
$b = 1$
$c = \sqrt{2}$



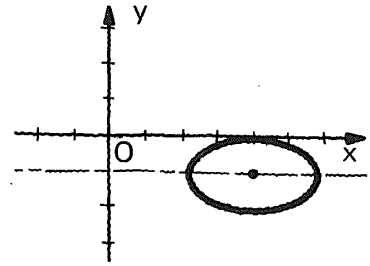


170

Una ecuación del eje focal de la elipse

$$\frac{(x-4)^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{1}=1$$

es



$y = -1$ ó $y + 1 = 0$

171

Vértices

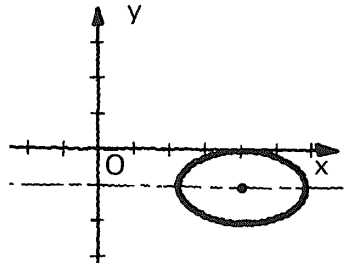
$V =$ [ ].

$V' =$ [ ].

Focos:

$F =$ [ ].

$F' =$ [ ].



$(4 + \sqrt{3}, -1)$

$(4 - \sqrt{3}, -1)$

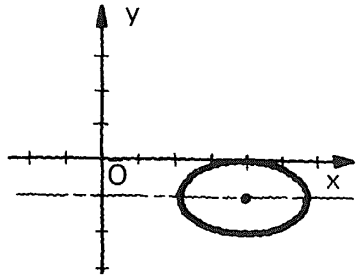
$(4 + \sqrt{2}, -1)$

$(4 - \sqrt{2}, -1)$

172

Excentricidad:

$e =$ [ ].

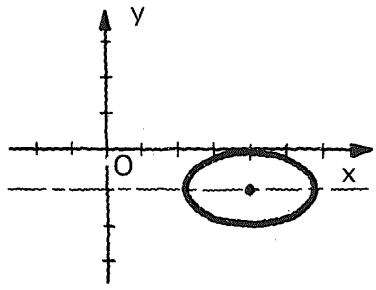


$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \doteq 0.816$$

173

Lado recto:



$lr =$ ⌊_____⌋.

$$lr = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \doteq 1.15$$

Verificar en la gráfica.

6.4.4.4

Práctica adicional,
si se considera necesario.

6.4.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* una ecuación ordinaria para una elipse (horizontal o vertical);

- *dar* los siguientes elementos de una elipse (horizontal o vertical) a partir de una ecuación dada en la forma ordinaria o de una gráfica cartesiana:

  — eje y semieje mayor,
  — eje y semieje menor,
  — distancia y semidistancia focal,
  — eje focal,
  — centro,
  — vértices,
  — focos,
  — excentricidad,
  — lado recto.

4.5

Ecuación general de una elipse con ejes paralelos a los coordenados

174

Una ecuación de una elipse, en alguna de las formas:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{ó} \quad \frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

puede ser transformada en una ecuación equivalente de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

llamada

ecuación general de una elipse con ejes paralelos a los coordenados.

175

Sea la ecuación $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-5)^2}{4}=1$

que se quiere transformar en una ecuación general de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

176

Estado inicial: $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$

1. Multiplicar ambos miembros por el producto de los denominadores del primer miembro.

[ ] X [ ] = [ ].

Estado intermedio 1: [ ]

$9 \times 4 = 36$

$4(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = 36$

177

Estado inicial: $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$

Estado intermedio 1: $4(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = 36$

2. Desarrollar los binomios cuadráticos del primer miembro.

[ ]

$4(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 - 10y + 25) = 36$

178

Estado inicial: $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$

Estado intermedio 1: $4(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = 36$

Estado intermedio 2: $4(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 - 10y + 25) = 36.$

3. Efectuar los productos indicados en el primer miembro.

[ ]

$4x^2 - 24x + 36 + 9y^2 - 90y + 225 = 36$

179

Estado intermedio 3: $4x^2 - 24x + 36 + 9y^2 - 90y + 225 = 36$

4. Sumar a ambos miembros el inverso aditivo del segundo miembro, "reducir términos semejantes" y ordenar de acuerdo con el modelo:

Estado final: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$4x^2 + 9y^2 - 24x - 90y + 225 = 0$

180

En el siguiente cuadro se presenta el procedimiento completo, el cual debe ser estudiado con mucha atención.

181

Estado inicial: $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y-5)^2}{4} = 1$

Estado intermedio 1: $4(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = 36$

Estado intermedio 2: $4(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 - 10y + 25) = 36$

Estado intermedio 3: $4x^2 - 24x + 36 + 9y^2 - 90y + 225 = 36$

Estado final: $4x^2 + 9y^2 - 24x - 90y + 225 = 0$

Modelo del estado final: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

6.4.5.1

Práctica adicional,
si se considera necesario

182

Ahora,
se requiere transformar la ecuación

$$16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y - 92 = 0$$

en una ecuación de alguna de las formas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad o \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

183

Tengamos presente
la conveniencia de
interpretar esto
como **un proceso de transformación**
a partir de un estado inicial
hasta un estado final;
pasando por una serie de
estados intermedios.

184

Estado inicial: $16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y - 92 = 0$

1. Agrupar los términos en **x**, los términos en **y** y "pasar" el término independiente al segundo miembro.

Estado intermedio 1: _____

$16x^2 + 32x + 9y^2 - 36y = 92$

185

Estado intermedio 1: $16x^2 + 32x + 9y^2 - 36y = 92$

2. Expresar el binomio en x como un producto de dos factores, uno de los cuales es el coeficiente de x^2; y el binomio en y como un producto de dos factores uno de los cuales es el coeficiente de y^2:

Estado intermedio 2: _____

$16(x^2 + 2x) + 9(y^2 - 4y) = 92$

186

Estado intermedio 2: $16(x^2 + 2x) + 9(y^2 - 4y) = 92$

3. Completar trinomios cuadrados perfectos en **x** y en **y**.

Estado intermedio 3: _____

Mucha atención.

$16(x^2 + 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) = 92 + 16 + 36$

* $16 = \overbrace{16 \times 1}$ y $36 = \overbrace{9 \times 4}$.

187

Estado intermedio 3: $16(x^2 + 2x + 1) + 9(y_2 \nrightarrow 4y + 4) = 144$

4. Factorizar los trinomios cuadrados perfectos en x e y:

Estado intermedio 4: [ ]

$16(x + 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 144$

188

Estado intermedio 4: $16(x + 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 144$

5. Dividir ambos miembros entre 144:

Estado final: [ ]

$$\frac{(x + 1)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1$$

189

Estudiar con atención el procedimiento completo presentado en el siguiente cuadro.

190

Estado inicial: $16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y - 92 = 0$

Estado intermedio 1: $16x^2 + 32x + 9y^2 - 36y = 92$

Estado intermedio 2: $16(x^2 + 2x) + 9(y^2 - 4y) = 92$

Estado intermedio 3: $16(x^2 + 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) = 144$

Estado intermedio 4: $16(x + 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 144$

Estado final: $\frac{(x + 1)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1$

Modelo del estado final: $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$

191

Al ser transformada la ecuación general $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en una ecuación de alguna de las formas:

$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ ó $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2}$

estamos en condiciones de determinar todos los elementos de la elipse.

192

Por ejemplo, al ser transformada la ecuación: $16x^2 + 9y^2 + 32x - 36y - 92 = 0$

en esta otra: $\frac{(x + 1)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1$

sabemos que representa una elipse **vertical/horizontal.**

vertical

193

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

El centro es el punto C = [_____].

El semieje mayor es igual a [_____].

El semieje menor es igual a [_____].

$(-1, 2)$

4

3

194

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

La semidistancia focal es [_____].

$a = 4$

$b = 3$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9}$

$c = \sqrt{7}$

$\sqrt{7} \doteq 2.65$

195

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

La excentricidad e es igual a [_____].

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\frac{\sqrt{7}}{4} \doteq 0.66$

196

$$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

El lado recto *lr* es igual a [_____].

$$lr=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 9}{4}=\frac{18}{4}=4.5$$

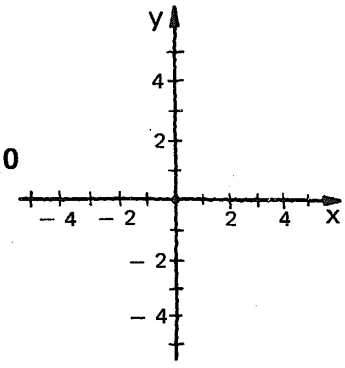
$$\frac{9}{2}=4.5$$

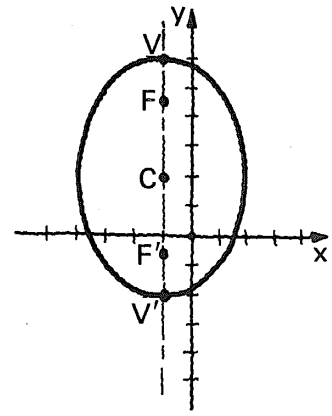
197

Hacer
la gráfica cartesiana
de
$16x^2+9y^2+32x-36y-92=0$

o

$$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$





198

Vértices:

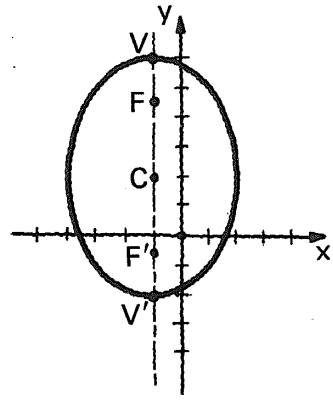
V = [_____].

V′ = [_____].

Focos:

F = [_____].

F′ = [_____].



(− 1, 6)

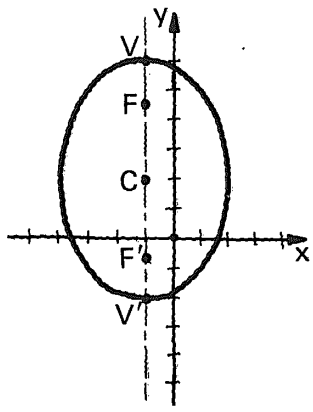
(− 1, − 2)

$(-1, 2+\sqrt{7})$

$(-1, 2-\sqrt{7})$

199

Una ecuación
del eje focal es



$x = -1$ ó $x + 1 = 0$

6.4.5.2

Práctica adicional
de
transformación de una ecuación
general de una elipse
en una ecuación ordinaria
y
obtención de los elementos
de la elipse,
si se considera necesario.

200

Se tiene la ecuación

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 105 = 0$$

que vamos a "poner"
en alguna de las
formas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ó } \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

201

Estado inicial: $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 105 = 0$

Estado intermedio 1: _____

Estado intermedio 2: _____

Estado intermedio 3: _____

Estado intermedio 4: _____

Estado final: _____

Respuesta en el cuadro siguiente.

$$6x^2 - 24x + 9y^2 - 54y = -105$$

$$6(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) = -105$$

$$6(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = 0$$

$$6(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{6} = 0$$

202

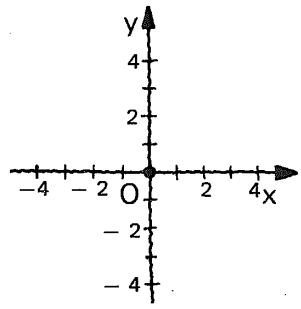
Podemos observar que de $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 105 = 0$ no obtenemos una ecuación de alguna de las formas

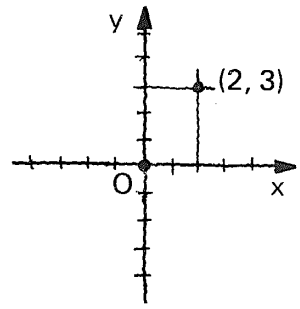
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

por lo que concluimos que la ecuación dada no representa una elipse sino un punto (h, k).

203

Hacer
la gráfica cartesiana
de
$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 105 = 0$
o
$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{6} = 0$





Puede fácilmente verificarse que el único par ordenado que satisface cualquiera de las ecuaciones dadas es (2, 3).

204

Ahora
intentemos
transformar
la ecuación

$8x^2 + 12y^2 + 16x - 48y + 152 = 0$

en una
ecuación de alguna de las formas

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ o $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Ver cuadro siguiente:

205

Estado inicial: _____

Estado intermedio 1: _____

Estado intermedio 2: _____

Estado intermedio 3: _____

Estado intermedio 4: _____

Estado final: _____

Respuesta
en el cuadro
siguiente.

$$8x^2 + 12y^2 + 16x - 48y + 152 = 0$$

$$8x^2 + 16x + 12y^2 - 48y = -152$$

$$8(x^2 + 2x) + 12(y^2 - 4y) = -152$$

$$8(x^2 + 2x + 1) + 12(y^2 - 4y + 4) = -96$$

$$8(x + 1)^2 + 12(y - 2)^2 = -96$$

$$\frac{(x + 1)^2}{12} + \frac{(y - 2)^2}{8} = -1$$

206

De $\mathbf{8x^2 + 12y^2 + 16x - 48y + 152 = 0}$

obtuvimos: $\mathbf{\dfrac{(x + 1)^2}{12} + \dfrac{(y - 2)^2}{8} = -1}$

Vemos que en este caso tampoco obtenemos una ecuación de alguna de las formas:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

207

Podemos observar que la ecuación

$$\frac{(x + 1)^2}{12} + \frac{(y - 2)^2}{8} = -1$$

no puede ser satisfecha por ningún par ordenado de números reales, porque

Intentemos dar una respuesta.

Respuesta en el cuadro siguiente.

Si x e y son números reales $(x + 1)$ y $(y - 2)$ son números reales.

Si $(x + 1)$ y $(y - 2)$ son números reales $(x + 1)^2$ y $(y - 2)^2$ son números reales positivos.

Si $(x + 1)^2$ y $(y - 2)^2$ son números reales positivos $\frac{(x + 1)^2}{12}$ y $\frac{(y - 2)^2}{8}$ son números reales positivos.

Si $\frac{(x + 1)^2}{12}$ y $\frac{(y - 2)^2}{8}$ son números reales positivos, su suma: $\frac{(x + 1)^2}{12} + \frac{(y - 2)^2}{8}$ debe ser un número real positivo, y por lo tanto, diferente de -1.

208

Las ecuaciones

$$8x^2 + 12y^2 + 16x - 48y + 152 = 0$$

ó

$$\frac{(x + 1)^2}{12} + \frac{(y - 2)^2}{8} = -1$$

no representan ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano.

209

En conclusión.
Una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con $\begin{cases} A, C, D, E, F \in \mathbb{R} \\ A \neq C \\ AC > 0 \end{cases}$ } A y C diferentes y del mismo signo.

puede representar:

- una elipse con ejes paralelos a los cartesianos,
- un punto,
- ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano.

210

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$A, C, D, E, F \in \mathbb{R} \wedge A \cdot C > 0$

Si $A = C$ la ecuación representa:

- una circunferencia,
- un punto,
- ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano.

En tal caso,
la ecuación puede ser escrita en la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

6.4.5.3

Práctica adicional
de
determinación del conjunto de puntos
representado por una ecuación
de la forma
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
dando los elementos
en el caso de representar
una elipse,
si se considera necesario.

6.4.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *transformar* una ecuación dada en alguna de las formas:

  $$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

  $$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

  en una ecuación de la forma:

  $$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

- *transformar* una ecuación dada en la forma:

  $$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

  en una ecuación de alguna de las formas:

  $$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

  $$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

- *dar* el conjunto de puntos representado por una ecuación general de la forma:

  $$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

  con $A, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ y $AC > 0$

Esta obra se terminó de imprimir
el día 15 de agosto de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO EV KC 100

Bloque 6:

Geometría analítica

En los ocho *módulos de color morado* que forman el bloque 6, *Geometría analítica*, se amplían y formalizan los conceptos de relación, función y gráfica cartesiana. En el *módulo 1* se incluyen algunos conceptos y procedimientos elementales, tales como:

- Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano
- División de un segmento rectilíneo según una razón dada
- Ángulo formado por dos rectas concurrentes
- Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

Después, se conduce *paso a paso* al lector hacia la revisión de los lugares geométricos más comunes. Así, en el *módulo 2* se analiza la recta; en el *módulo 3*, la circunferencia; en el *módulo 4*, la elipse; en el *módulo 5*, la hipérbola, y en el *módulo 6*, la parábola.

Luego, con el estudio de las cónicas y la ecuación general de segundo grado, el cual se realiza en el *módulo 7*, se accede a la integración de un gran marco conceptual.

Dicho marco conceptual se amplía aún más en el *módulo 8*, donde se brindan los elementos necesarios para llevar a cabo el análisis de cualquier lugar geométrico del plano cartesiano.

Por último, las fórmulas y los conceptos fundamentales de todos los temas comprendidos en los módulos que integran este bloque, aparecen en el módulo de resumen llamado *Memo 6. Geometría analítica.*

Bloque	Módulo	Módulo de resumen
1 **ÁLGEBRA** ESTRUCTURAS Y OPERACIONES **Libros color café**	*1- Conjuntos* *2- Estructuras matemáticas* *3- El conjunto de los enteros* *4- Operaciones con enteros* *5- Lenguaje algebraico 1. Formación* *6- Lenguaje algebraico 2. Transformación* *7- Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división* *8- Operaciones con polinomios 2. Productos notables* *9- Operaciones con polinomios 3. Factorización* *10- El conjunto de los racionales* *11- Operaciones con expresiones racionales* *12- El conjunto de los reales* *13- Operaciones con expresiones reales* *14- El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones*	***MEMO 1*** *ÁLGEBRA. ESTRUCTURAS Y OPERACIONES*
2 **ÁLGEBRA** MODELOS **Libros color verde**	*1- La ecuación como modelo matemático* *2- Ecuaciones de primer grado* *3- Sistemas de ecuaciones de primer grado* *4- Desigualdades de primer grado* *5- Ecuaciones de segundo grado* *6- Desigualdades de segundo grado* *7- La relación como modelo matemático* *8- Funciones* *9- Funciones exponenciales* *10- Funciones logarítmicas* *11- Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas* *12- Resolución de problemas*	***MEMO 2*** *ÁLGEBRA. MODELOS*
3 **NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA** **Libros color azul**	*1- Lógica proposicional 1. Proposiciones* *2- Lógica proposicional 2. Argumentos*	***MEMO 3*** *NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA*
4 **GEOMETRÍA EUCLIDIANA** **Libros color rojo**	*1- Conjuntos de puntos* *2- Relaciones binarias* *3- Figuras planas* *4- El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos.* *5- Polígonos convexos* *6- Relación de semejanza* *7- Geometría métrica en el plano* *8- Cuerpos geométricos*	***MEMO 4*** *GEOMETRÍA EUCLIDIANA*
5 **TRIGONOMETRÍA** **Libros color ocre**	*1- Las razones trigonométricas de un ángulo agudo* *2- Resolución de triángulos rectángulos* *3- El círculo trigonométrico* *4- Las funciones trigonométricas* *5- Las funciones trigonométricas inversas* *6- Identidades trigonométricas* *7- Resolución de triángulos cualesquiera* *8- Ecuaciones trigonométricas*	***MEMO 5*** *TRIGONOMETRÍA*
6 **GEOMETRÍA ANALÍTICA** **Libros color morado**	*1- Introducción a la geometría analítica* *2- La recta* *3- La circunferencia* ***4- La elipse*** *5- La hipérbola* *6- La parábola* *7- Las cónicas y la ecuación general de segundo grado* *8- Relaciones y lugares geométricos*	***MEMO 6*** *GEOMETRÍA ANALÍTICA*
7 **CÁLCULO DIFERENCIAL** **Libros color azul turquesa**	*1- Introducción al cálculo diferencial* *2- Límite de una función* *3- Continuidad de una función* *4- Derivación de funciones algebraicas* *5- Derivación de funciones trascendentes* *6- Extremos de una función (máximos y mínimos)*	***MEMO 7*** *CÁLCULO DIFERENCIAL*
8 **CÁLCULO INTEGRAL** **Libros color negro**	*1- Sumatoria y notación sigma* *2- La integral definida y la integral indefinida* *3- Integrales elementales* *4- Métodos de integración 1* *5- Métodos de integración 2* *6- Algunas aplicaciones del cálculo integral*	***MEMO 8*** *CÁLCULO INTEGRAL*

ISBN 968-24-0835-0